# Dificultades de Interpretación del concepto de continuidad de una función en un punto en el marco de la teoría APOE

Nora Pereyra[1], Carlos Gabriel Herrera[2]
*(1) Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Catamarca*
npereyra46@gmail.com
*(2) Facultad de Tecnología y Cs. Aplicadas. Universidad Nacional de Catamarca*
cgherrera@tecno.unca.edu.ar

Fecha de recepción del trabajo: 18/12/2017
Fecha de aceptación del trabajo: 24/05/2018

**RESUMEN**: En este trabajo se analizan las dificultades de interpretación que presentan los estudiantes de primer curso de cálculo diferencial en una variable, con respecto al concepto de continuidad de una función en un punto, en el marco de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). El proceso de investigación en esta teoría se fundamenta en un modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir un esquema matemático, llamado descomposición genética. Ésta, consiste en una hipótesis sobre una descripción detallada de las construcciones que los estudiantes deberían realizar para aprender un concepto matemático. En este sentido, se propone un modelo de descomposición genética y se analizan las producciones de estudiantes, en base a un instrumento elaborado para tal fin, y en el que deben resolver tres situaciones diferentes, relacionadas con continuidad de una función en un punto y los temas vinculados a éste: dominio y límite de una función. Los resultados de este estudio preliminar, permiten planificar una secuencia didáctica, para el proceso de enseñanza y aprendizaje, teniendo en cuenta las dificultades encontradas en los temas de la asignatura que están asociados al concepto continuidad a través de su descomposición genética.

PALABRAS CLAVES: Continuidad, APOE, Descomposición Genética

*INTERPRETATION DIFICULTIES OF FUNCTION CONTINUITY IN A POINT FROM THE APOS THEORY*

**ABSTRACT**: In this paper, interpretation difficulties undergone by first-year students when studying differential calculus in a variable, in relation to the concept of function continuity in a point, according to the APOS theory (Action, Process, Object, Scheme) are analyzed. The research process underlying this theory is based on a cognitive model by which a student can build a mathematical scheme, called genetic decomposition. This consists on a hypothesis about a detailed description of the constructions that students should make in order to learn a particular mathematical concept. In this sense, a model of genetic decomposition of the subject under study is proposed, and student productions are analyzed, based on an instrument developed for that purpose in which three different situations related to continuity of a function and its related topics must be solved: domain and limit of a function. The results of this preliminary study allow to organize a didactic sequence for the teaching and learning process, taking into account the difficulties found in the subjects associated with the fundamental concept through their genetic decomposition.

KEYWORDS: Continuity, APOS, Genetic Descompsition.

## 1 INTRODUCCIÓN

El aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto ha sido estudiado por numerosos investigadores en educación en matemática abordando los obstáculos y errores que dificultan la aprehensión del concepto. Entre los trabajos que analizan los obstáculos o conflictos que se producen en los alumnos en el estudio del concepto de límite se pueden citar, entre otros, a Cornù (1983), Tall (1978), Sierpinska (1987), Artigue (1995).
Por otro lado, Tall (1978) estudian las imágenes conceptuales de los alumnos y los conflictos cognitivos que se producen en el estudio de límite y continuidad. En el mismo sentido, algunos autores proponen secuencias didácticas para el concepto de límite como Cornú (1983) y Sierpinska (1987). En cambio, Cotrill (1996) relaciona dificultades que se les presentan a estudiantes en distintos temas del Cálculo, como continuidad o diferenciación con la interpretación del concepto de límite.
A su vez, y dentro de la temática, Sierra Vázquez (2000), analiza respuestas de alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria, sobre situaciones que involucren los conceptos de límite funcional y continuidad, y concluye que existen dificultades en la comprensión de los conceptos de límite y continuidad, aún después de su enseñanza, observando diferencias entre la definición de los conceptos y las concepciones que los alumnos tienen sobre ellos. Por su parte, Hitt

(2003) propone acompañar los procesos algebraicos de resolución de problemas sobre límite de funciones con un acercamiento que promueva tareas de conversión entre las representaciones numérica, algebraica y gráfica del problema, considerando importante un acercamiento al valor del límite a través de una tabla o la lectura de una gráfica para luego pasar al cálculo algebraico. Vrancken (2006) analizan dificultades de alumnos relacionadas con el concepto de límite y concluyen que tienen dificultades para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el mismo punto, reconocimiento de límites laterales y dificultades en relacionar la representación algebraica del concepto de límite con su interpretación geométrica o viceversa. Gatica (2010) analiza las dificultades en la comprensión del concepto de continuidad, especialmente cuando la función está definida a trozos, observándose que un importante porcentaje de alumnos no tiene en cuenta la representación gráfica realizada al momento de determinar la continuidad de una función como así también, se observaron contradicciones entre la representación gráfica y sus argumentaciones.

El análisis de la continuidad de una función en un punto es una propiedad local. Esta propiedad puede ser instruida a partir de las gráficas de funciones en determinados puntos, comparando entre el valor de la función dada f(x) en el punto x=a con el valor que toma el límite de f(x) cuando x tiende a x = a.

En esta investigación, se trabaja con alumnos de primer curso de Cálculo de una variable, de la carrera Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Catamarca, y teniendo en cuenta las consideraciones previas, se planteó como objetivo analizar las dificultades de interpretación del concepto de continuidad de una función en un punto en el marco de la teoría APOE. Por tratarse de un estudio preliminar se trabajó solamente con discontinuidades de tipo evitables o removibles.

## 2 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Esta investigación está fundamentada en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) propuesta por Dubinsky (1991). El proceso de investigación, en esta teoría, conlleva el realizar un modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir un concepto matemático, llamado descomposición genética. Esta consiste en una hipótesis, sobre una descripción detallada de las construcciones que los estudiantes pueden hacer para aprender un concepto. La descomposición genética se pone a prueba con los estudiantes y los datos que se obtienen, se pueden emplear para refinarla, a fin de dar cuenta de mejor manera de las construcciones de los estudiantes al aprender dicho concepto (Dubinsky, 1991), y también se puede utilizar como una guía, en el diseño de material didáctico.

En ese sentido, el conocimiento matemático de un individuo, es su tendencia a responder a las situaciones problemáticas, reflexionando sobre ellas y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizarlos en esquemas, a fin de manejar las situaciones (Dubinsky, 1996). Se mencionan las estructuras mentales denominadas: acción, proceso, objeto y esquema, que constituyen la parte primordial de esta teoría.

Una acción consiste en una transformación de un objeto, como resultado de un estímulo externo y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos por seguir (Asiala, 1996). Cabe recalcar que la construcción de acciones viene a ser crucial al inicio de la formación de un concepto.

Cuando una acción, o una serie de acciones se repite y el individuo reflexiona sobre ellas, se puede interiorizar en un proceso (Asiala, 1996). Así, el individuo puede pensar en un concepto en términos generales y no precisa hacer cálculos explícitos. Este sujeto, también es capaz de incorporar estas acciones a su conocimiento, y decide llevarlas a cabo por su propia cuenta, sin necesidad de indicaciones externas.

Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso como un todo, realiza las transformaciones, ya sean acciones o procesos, que pueden actuar sobre él y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces, ha logrado encapsular este proceso en un objeto (Asiala, 1996).

Con respecto al logro del último nivel, denominado esquema, se puede decir que un esquema para un concepto en matemática, es una colección coherente de acciones, procesos y objetos y otros esquemas relacionados entre sí, consciente o inconscientemente en la mente de un individuo, que se pueden utilizar en una situación problemática, que tiene relación con ese concepto matemático (Trigueros, 2005). La coherencia, se refiere a que el estudiante puede decidir si alguna situación matemática se puede trabajar utilizando el esquema.

En la teoría APOE se parte de un análisis de los conceptos matemáticos, en el que se ponen de relieve las construcciones cognitivas que pueden ser requeridas en su aprendizaje. A este análisis se le conoce como descomposición genética del concepto; es decir: una descomposición genética parte del análisis de las construcciones que el sujeto hace, conforme aprende el concepto matemático, en términos de lo que es observable. En la descomposición genética que se preparó para el concepto continuidad de una función, se describen las construcciones mentales que se consideran como prerrequisitos, o dicho de otro modo, son las estructuras mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas) que determinan un camino, mediante el cual un estudiante puede construir de manera adecuada dicho concepto.

### *2.1 Descomposición Genética del Concepto de continuidad de una función en un punto.*

Se propone en este trabajo una descomposición genética del concepto continuidad de una función en un punto. Para llevar a cabo una descomposición genética es fundamental determinar las estructuras previas que un individuo debe poseer, para dar lugar a la construcción de un nuevo concepto matemático.

Definición: "Una función f es continua en un punto x=a si y sólo si:

1) $f(a)$ existe;

2) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es finito;

3) $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

En base a la tercera condición, es posible expresar, en términos de límite:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0; \quad \exists\, \delta>0 \quad /(\forall x)$$

$$(x \in D_f \wedge |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Si una o más de estas tres condiciones no se cumplen en a, entonces se dice que la función f es discontinua en x=a.

En general, suponga que f es una función discontinua en el número "a" para la cual $\lim_{x \to a} f(x)$ existe. Entonces f(a) no existe, o bien

$$f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$$

Dicha discontinuidad es una discontinuidad removible (o evitable) porque f(x) se redefine en a. Si la discontinuidad no es removible, entonces se le llama discontinuidad esencial". (Leithold, 1998, pag. 67-68),

De esta definición queda establecido que las estructuras previas que un alumno debe poseer, para dar lugar a la construcción del concepto motivo de este trabajo, son: dominio de definición de una función y límite de una función f(x) cuando la variable x tiende al punto x=a. En este marco, los alumnos, para comprender el concepto de continuidad deberían haber alcanzado el nivel objeto de estos dos conceptos.

Se toma de López Acosta (2011, pág 29) la descripción de los niveles de acción en la descomposición genética del concepto de función. Así, un estudiante se encuentra en el nivel de acción del concepto de función, cuando:

- Realiza evaluaciones de valores en una expresión dada, sin pensar sobre el proceso de transformación que sufre un valor de entrada.
- Para calcular el valor de salida, ha de realizar paso a paso las operaciones especificadas por una relación matemática.
- Piensa que "algo" es función solo si se le presenta una expresión matemática.
- No puede establecer un procedimiento para situaciones en las que no se especifica uno.
- Es incapaz de describir un procedimiento sin llevarlo a cabo, es decir, su manera resolutiva suele ser paso a paso.

A su vez el estudiante se encuentra en nivel del proceso del concepto de función, cuando:

- Se concentra en el proceso de transformación de un valor de entrada y lo ve como un "todo", es decir como una sola operación.
- Es capaz de establecer un procedimiento cuando no se especifica uno. Puede graficar una función con solo situar pocos puntos en el plano.
- Puede realizar mentalmente cálculos u operaciones ya sean especificadas o no, para determinar un valor de salida.

Se encuentra en nivel de objeto del concepto de función, cuando:

- Considera que una función es "algo" a lo que puede aplicarse operaciones y manipularse.
- Reconoce funciones a través de su gráfica.
- Piensa que una expresión matemática específica puede representar una serie de datos, procedimientos o fenómenos.

Se encuentra en el nivel esquema del concepto de función cuando, además de reconocer el concepto desde diferentes marcos como algebraico, geométrico o coloquial, establece relaciones con otros temas.

Con respecto al nivel acción en la descomposición genética del concepto de límite de una función en un punto Ruiz (2013) plantea:

- Encontrar el límite reemplazando algún número en una fórmula general.
- Realizar un proceso de aproximación excesivo sin identificar el patrón o regla que permite de manera efectiva encontrar el límite.

Como ejemplos de proceso en el concepto de límite:

- Evaluar puntos cercanos para encontrar un patrón o regla para determinar el límite.
- Realizar procesos aproximativos que recurran a procesos de generalización para entender el concepto de límite.

El estudiante se encuentra en nivel objeto en el concepto de límite, cuando:

- Logra observar el objeto límite como la mejor aproximación detrás de un proceso de generalización, en el cual se identificó algún tipo de regla o patrón que permitió encontrarlo, además posee un buen significado de la convergencia que lleva consigo la aproximación.

Pensar en forma de esquema sobre límites como procesos de aproximación implica una comprensión muy cercana del proceso de límite permitiendo observar este en varias representaciones.

## 3 METODOLOGÍA

Se trata de un estudio descriptivo de carácter cuantitativo y cualitativo, que analiza las respuestas de alumnos a una serie de actividades relacionadas con el tema de continuidad de una función en un punto, en el marco de la descomposición genética del concepto, que involucra además, los temas: función, dominio de una función, definición de una función en un punto y límite funcional.

Para el estudio se han considerado 12 (doce) estudiantes, el total de alumnos que finalizaron la asignatura Análisis Matemático I, correspondiente a los contenidos de cálculo diferencial e integral de una variable de la carrea de Profesorado de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Catamarca, cohorte 2016.

Se utilizó como instrumento un cuestionario abierto, aplicado durante el dictado del tema específico en estudio, en el que se plantean tres actividades relativas al concepto de continuidad de una función en un punto, donde el alumno debe responder a una serie de preguntas que corresponden a este concepto, como así también a los temas asociados, que son el de función y el de límite de una función en un punto. Desde el punto de vista temporal se trata de una investigación de carácter transversal, ya que se lleva a cabo en un solo momento, durante el cursado de la asignatura.

Se realiza primero un análisis cuantitativo de las respuestas a cada una de las actividades solicitadas, para luego llevar a cabo un análisis cualitativo, poniendo énfasis en los apartados que los alumnos tuvieron dificultades en responder correctamente; analizando los errores más frecuentes.

### *3.1 Instrumento de Recolección de Datos.*

Se describe el instrumento de recolección de datos, consistente en tres actividades que debían realizar los alumnos

Actividad 1

Dada f (x) = $x^5$ - 1, se pide:

a) Indique dominio de la función.
b) ¿Está definida en x= -1?
c) ¿Existe $\lim_{x \to -1} f(x)$?
d) ¿Es continua la función dada, en x= -1? Justifique su respuesta.

La segunda actividad planteada corresponde a una función racional, cuya característica es que presenta una discontinuidad evitable en y = 2, punto en la que la función no está definida pero si existe el límite cuando y tiende a 2.

Actividad 2

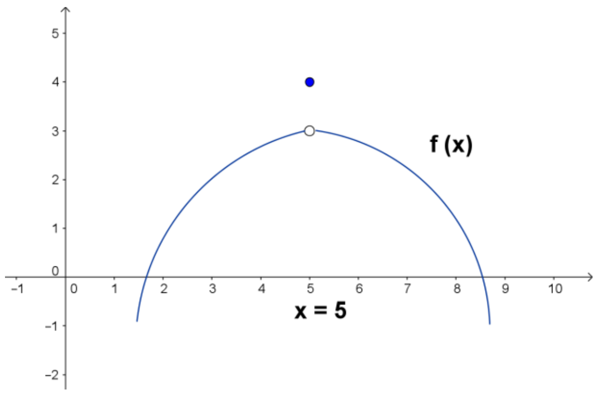
Dada la función: $h(y) = \dfrac{y^2 - 4}{y - 2}$

a) Graficar la función dada.
b) Indicar dominio de definición
c) ¿Está definida en y = 2?
d) ¿Existe $\lim_{y \to 2} h(y)$?
e) ¿Es continua en y = 2? Justifique su respuesta.
f) En caso de no resultar continua en y = 2, clasifíquela. Si la discontinuidad es evitable, redefina la función.

Actividad 3

Se presenta a los alumnos en registro gráfico, una función donde el valor de la misma para x = 5 no se corresponde con la curva sino con otro punto, existiendo por lo tanto una discontinuidad.

Dada la función f cuya representación gráfica es:




Se solicita:

a) Indicar dominio de definición de la función.
b) ¿Está definida en x = 5?
c) ¿Existe $\lim_{x \to 5} f(x)$?
d) ¿Es continua la función dada, en x= 5?
e) En caso de no ser continua, clasifíquela. De ser posible, redefina la función.

Para el análisis cuantitativo se consideraron cuatro categorías de respuestas de los alumnos que se codifican de la siguiente manera:

0 – No responde
1 – Responde incorrectamente
2 – Responde correctamente sin justificación o justificación incorrecta.
3 – Responde correctamente con su respectiva justificación en el lenguaje matemático. (Verbal, o algebraico)

## 4 RESULTADOS

En Tabla 1 se presentan las frecuencias de respuestas a los apartados referidos al tema función, dominio de función y si una función está definida en un punto x = a.

Tabla 1: Frecuencias de respuestas de las actividades del instrumento.
Tema: dominio y definición de una función

| ALUMNO | 1A | 1B | 2A | 2B | 2C | 3A | 3B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **A1** | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| **A2** | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| **A3** | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| **A4** | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| **A5** | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| **A6** | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| **A7** | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| **A8** | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| **A9** | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| **A10** | 3 | 0 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| **A11** | 3 | 0 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| **A12** | 3 | 0 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 |

Teniendo en cuenta la teoría que sustenta este trabajo y en función del análisis de las respuestas de los alumnos a las actividades planteadas en el instrumento, se observa que dos de ellos, A1 Y A2, han logrado encapsular el concepto de función, nivel objeto, ya que lograron interpretar desde los dos registros de representación presentados, como lo son el algebraico y el gráfico, también establecieron correctamente el dominio de definición y reconocieron en qué valores no está definida la función a partir de los registros presentados.
Uno de los alumnos utiliza para su justificación el lenguaje simbólico, mientras que el otro alumno lo hace desde el marco coloquial, según se muestra en las Figuras 1 y 2.

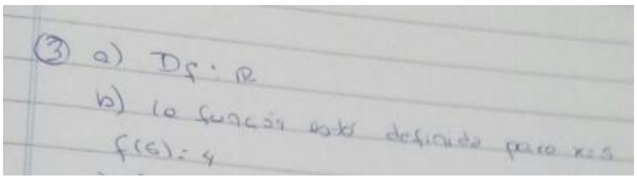



Figura 1: Justificación del alumno identificado como A2 respecto a la función de la actividad Problema N° 3

presentaron dificultades en la justificación de sus respuestas, desde el registro coloquial, con el rigor propio del lenguaje matemático.

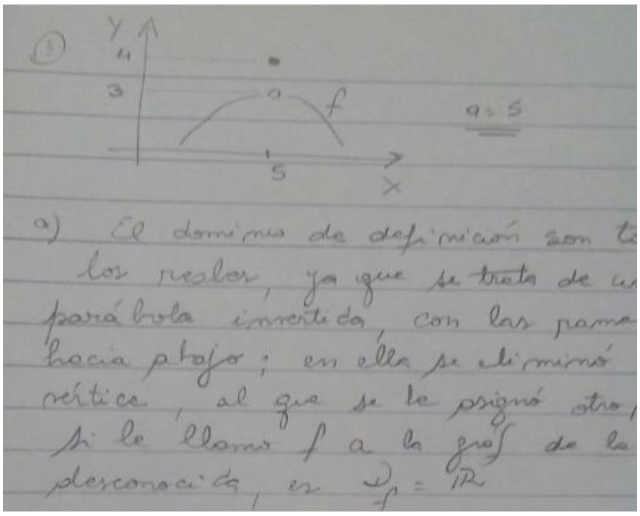


Figura 2: Justificación del Alumno identificado como A1 respecto de la actividad N° 3, concepto "Dominio de una función"

Siete alumnos, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, al momento de aplicar el instrumento, están en nivel proceso, ya que en general, han logrado identificar dominio, como así también si una función está definida en un punto x=a; en cambio, se ha observado que

Los estudiantes A10, A11, A12 están en nivel acción, pues para calcular el valor de salida, deben realizar paso a paso las operaciones especificadas por la relación matemática, dada en el instrumento. Si bien determinan, en general, el dominio de la función, tienen

dificultades en sus justificaciones desde el punto de vista matemático.
Con respecto al concepto de límite de una función, cuando el valor de la variable independiente tiende a un valor "a", que está también vinculado a la descomposición genética del concepto en estudio, tal como lo es el de continuidad de una función en el punto x=a, los resultados de las producciones de los alumnos se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2: Frecuencias de respuestas de las actividades del instrumento.
Tema: límite y continuidad.

| ALUMNO | 1C | 1D | 2D | 2E | 2F | 3C | 3D | 3E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **A1** | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| **A2** | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| **A3** | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| **A4** | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| **A5** | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| **A6** | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| **A7** | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| **A8** | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| **A9** | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| **A10** | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **A11** | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **A12** | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

En referencia al concepto de límite, se pueden establecer los niveles de acuerdo a la teoría APOE teniendo en cuenta las respuestas de los alumnos a las actividades presentadas en el instrumento:
Dos estudiantes, A1 y A2, lograron encapsular el concepto, nivel objeto, dado que realizan procesos aproximativos en un entorno del punto de acumulación, hasta dar con el valor del límite, lo que pone en evidencia en la actividad 3, del instrumento de recolección de datos. Justifican correctamente sus respuestas y trabajando con el concepto matemático límite, tanto en el registro algebraico, actividades 1 y 2, como en el registro gráfico, que se presentó en la actividad 3. Se muestra en Figuras 3 y 4 las producciones de estos alumnos respecto al concepto de límite de una función.

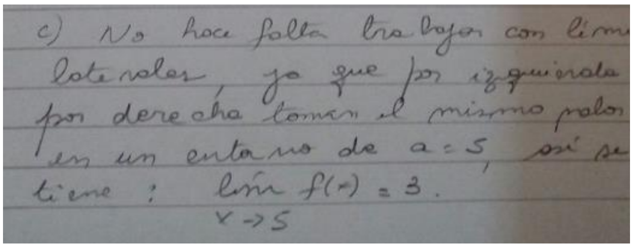


Figura 3: Justificaciones del alumno A2 respecto a la Actividad N° 3, concepto "Límite de una función"

Siete estudiantes, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, han logrado desempeños en el nivel acción, fundamentados en dificultades en el cálculo del límite, en especial en el caso de funciones racionales, cuando la función no está definida en un punto.

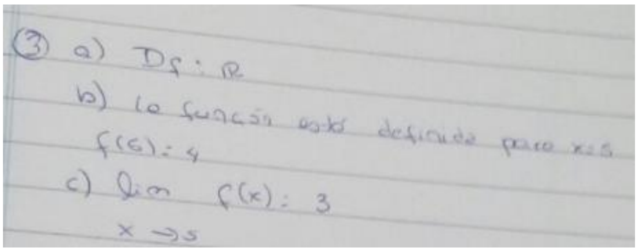


Figura 4: Justificaciones del alumno A1 respecto a la Actividad N° 3, concepto "Límite de una función"

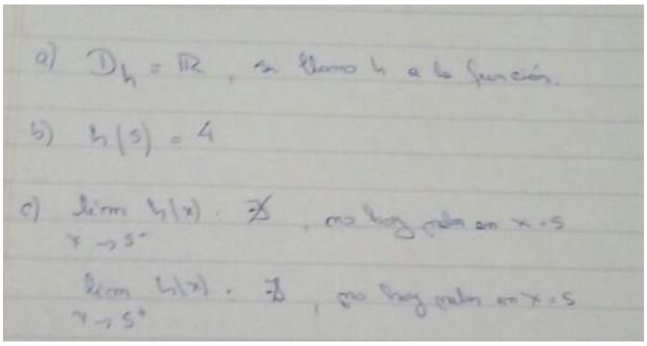


Figura 5: Producción del alumno A5 respecto al concepto de límite.

El alumno identificado como A5, tiene dificultades para la interpretación del concepto "punto de acumulación" cuando trabaja con límites de una función ya que considera en la tercera actividad que el límite no existe en x= 5, cuando en realidad el límite si existe pero su valor es diferente al valor de la función en ese punto, se observa la producción del alumno en la Figura 5.
El desempeño de los estudiantes A10, A11, A12, muestran dificultades para el cálculo de límite, pudiendo solamente realizarlo por el reemplazo de la variable por el valor "a", se considera en este caso que no alcanzan el nivel acción debido a sus producciones.

Cuando se analizan las respuestas referidas al tema objeto de esta investigación, "continuidad de una función en un punto", si bien en la primera actividad se detecta un elevado porcentaje de alumnos que responde satisfactoriamente, estas respuestas no presentan justificaciones correctas desde el rigor propio del lenguaje matemático, reflejando, en cambio, ser de carácter más intuitivo. En la segunda y tercera actividad, solo dos alumnos logran redefinir la función y calcular el límite,

## 5 CONCLUSIONES

Los alumnos demuestran, en general, dificultades en la comprensión del concepto de continuidad de una función en un punto. Esto se deduce fundamentalmente de las justificaciones de las respuestas a los apartados de cada una de las actividades planteadas. Teniendo en cuenta la fundamentación teórica de este trabajo, la descomposición genética del tema en estudio involucra dos conceptos, como son el de función y el de límite de una función cuando x tiende a un punto de acumulación "a". En el primer caso, se observan inconsistencias en las respuestas de los alumnos, especialmente para determinar si una función está definida en un punto x=a. Otro error frecuente que se pudo observar, es el concepto de punto de acumulación, es decir, que el límite no se calcula en un punto sino en el entorno reducido de un punto, por lo tanto el límite puede existir aunque la función no esté definida en ese punto. Ello se pudo observar claramente en la tercera actividad, donde el valor de la función f(x) en un punto x=a, difiere del valor del límite cuando x tiende a ese punto. También es posible observar dificultades en la obtención del valor correspondiente al límite, cuando el punto x=a no pertenece a la gráfica, no están razonando que en realidad al calcular el valor del límite de una función en un punto, éste es un punto de acumulación, no han aprehendido por lo tanto, el concepto matemático de límite. Los resultados de este estudio preliminar permiten planificar una secuencia didáctica para el concepto en estudio, teniendo en cuenta las dificultades encontradas al determinar el dominio de definición de función; especialmente en casos de funciones racionales, determinar si una función está definida en un punto, y además las mencionadas dificultades en la interpretación del concepto de límite de una función cuando x tiende a un punto "a". Estos conceptos están relacionados con el tema de continuidad de una función en un punto de acuerdo a la descomposición genética propuesta en este trabajo.

## 6 REFERENCIAS


Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 1, 97-140. 1995.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Maa Notes*, 37-54. 1996.

Cornu, B. Quelques obstacles à l'apprentissage de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 4, 236-268. 1983.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., &Vidakovic, D. Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(2), 167-192. 1996.

Dubinsky, E., & McDonald, M. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. New ICMI *Study Series*. 1991.

Dubinsky, E. Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación matemática*, 8(3), 24-41. 1996.

Gatica, N., Maz-Machado, A., May, G., Cosci, C., Echevarría, G., &Renaudo, J. Un acercamiento a la idea de continuidad de funciones en estudiantes de Ciencias Económicas. Unión, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (22), 121-131. 2010.

Hitt, F. Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnologıa. Edición Especial: Educación Matemática, 213. 2003

Leithold, L.. El Cálculo, 7 ma edición. 1998.

López Acosta,l. Etapas de aprendizaje asociadas al concepto de función. Un estudio socioepistemológico. Tesis de Licenciado en Enseñanza de las Matemáticas. Mérida. Yucatán. Mexico. 2011.

Ruiz, C. G. C., Martínez, J. R. D., Herreño, A. A. M., & Monroy, Y. P. S. El Concepto de Límite Como Una Aproximación Óptima Mediante la Teoría APOE. *Revista Científica*, 331-335. 2013.

Sierpińska, A. Humaniti esstudents and epistemological obstacles related to limits. *Educational studies in Mathematics*, 18(4), 371-397. 1987.

Sierra Vázquez, M., González Astudillo, M. T., & López Esteban, C. Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(1). 2000.

Tall, D., & Vinner, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151-169. 1981.

Tall, D., & Schwarzenberger, R. L. Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics teaching*, 82, 44-49. 1978.

Trigueros, M. La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación matemática*, 17(1). 2005.

Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Muller, D., &Hecklein, M. Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA*, 8(29), 9-1. 2006.