

SECUENCIA DIDÁCTICA DEL CONCEPTO DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN UTILIZANDO SOFTWARE DINÁMICO EN EL MARCO DE LA TEORÍA APOE

Mónica Adriana Arguello, Carlos Gabriel Herrera**

* *Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas – UNCA*

DIDACTIC SEQUENCE OF THE CONCEPT OF THE DERIVATIVE OF A FUNCTION USING DYNAMIC SOFTWARE WITHIN THE FRAMEWORK OF THE APOS THEORY

RESUMEN: El proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial en el nivel superior presenta dificultades en la comprensión de los estudiantes, especialmente el concepto de derivada de una función en un punto. Las evidencias sobre investigaciones y nuestra experiencia en la Cátedra de Análisis Matemático I de las Carreras de Ingenierías de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la UNCA reflejan que los estudiantes logran un dominio aceptable de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas, pero difícilmente comprenden el significado de estos procedimientos. El objetivo general del presente trabajo es diseñar una secuencia didáctica en el proceso de aprendizaje del concepto derivada de una función utilizando como herramienta de apoyo el software dinámico GeoGebra en el marco de la teoría APOE. Para llevar a cabo la implementación de la propuesta se trabajó en cinco aspectos del proceso de enseñanza aprendizaje: clases teóricas y prácticas, talleres de resolución de problemas, actividades con GeoGebra y uso del aula virtual. Se espera con la implementación de la propuesta didáctica que el alumno logre comprender el concepto derivada de una función en un punto, desde el marco de la teoría APOE utilizando como herramienta de visualización el software dinámico GeoGebra.

Palabras claves: Derivada, visualización, geogebra, apoe, calculo.

ABSTRACT: The process of teaching and learning Differential Calculus at the higher education level presents difficulties in student comprehension, especially the concept of the derivative of a function at a point. Evidence from research and our experience in the Chair of Mathematical Analysis I in the Engineering programs at the Faculty of Technology and Applied Sciences of UNCA shows that students achieve an acceptable mastery of algebraic algorithms for calculating limits and derivatives, but they rarely understand the meaning of these procedures. The main objective of this work is to design a didactic sequence in the learning process of the concept of the derivative of a function, using the dynamic software GeoGebra as a supporting tool within the framework of the APOS theory. To implement the proposal, five aspects of the teaching-learning process were addressed: theoretical and practical classes, problem-solving workshops, activities with GeoGebra, and the use of the virtual classroom. The implementation of the didactic proposal aims for students to understand the concept of the derivative of a function at a point, within the framework of APOS theory, using the dynamic software GeoGebra as a visualization tool.

Keywords: Derivate, visualization, geogebra, apos, calculus.

INTRODUCCIÓN

El proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial en el nivel superior se enfrenta a un problema generalizado ya que los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de sus ideas básicas, especialmente las relacionadas con el concepto de derivada de una función en un punto.

En este sentido diversas investigaciones confirman estas dificultades en la comprensión del concepto en estudiantes ingresantes al nivel universitario, como ser las siguientes:

Urquieta, Carrillo Andrade y Soto Andrade [1] analizan el aprendizaje del concepto de derivada según el modelo APOE (Acción – Proceso – Objeto – Esquema) y resultados salientes muestran que, si el concepto de derivada en un punto no es

comprendido a nivel de Acción, los estudiantes tienen dificultades para extenderlo y transitar a un nivel superior de comprensión e interpretar el concepto geoméricamente. En el mismo sentido [2] detectan la tendencia a reducir el concepto de derivada a las operaciones algebraicas en desmedro de lo conceptual. Berry y Nyman [3], confirman que al comienzo de la actividad los estudiantes demuestran una visión simbólica algebraica del cálculo y les resulta difícil establecer conexiones entre las gráficas de una función derivada y la función misma. Estos trabajos tienen en común el diagnóstico, en diferentes contextos de las dificultades en la comprensión de la derivada, como un concepto matemático más que una serie de secuencias algebraicas.

Respecto a propuestas didácticas para el concepto

Derivada de una Función, [4] elabora una secuencia que involucre al software GeoGebra para el tratamiento del Cálculo Diferencial. [5] proporcionan el marco para la enseñanza para la comprensión (EpC), llegando a la construcción de la descomposición genética del concepto de derivada y a la definición de los niveles de comprensión del esquema de la derivada en las dos dimensiones definidas: gráfica y analítica. Por su parte, [1] para indagar el aprendizaje construido usaron el modelo cognitivo APOE propuesto por [6].

En referencia a investigaciones que fueron realizadas en el marco de la teoría APOE, [2] analizaron los niveles de comprensión del concepto derivada, cuyos resultados más importantes muestran una tendencia en alumnos a interpretar la derivada en términos del proceso algorítmico y también como dependencia de la expresión algebraica de la función. Por otra parte, se hicieron evidentes las dificultades para transitar de la gráfica de la función hacia la gráfica de la función derivada.

En [1] consideraron el aprendizaje del concepto de derivada según el modelo APOE y resultados salientes mostraron que, si el concepto de derivada en un punto no es comprendido a nivel de Acción, los estudiantes tienen dificultades para extenderlo y transitar a un nivel superior de comprensión e interpretar el concepto geoméricamente. Además, tienen dificultades de comprensión cuando deben discriminar entre proposiciones falsas y verdaderas enunciadas sobre propiedades de la derivada relacionadas con la monotonía y la concavidad de una función.

En [7], se analizó en base a la teoría APOE la comprensión gráfica del concepto de derivada y consideran que los estudiantes cuyo curso se basó en el análisis teórico del aprendizaje propuesto pueden haber tenido más éxito en el desarrollo de una comprensión gráfica de una función y sus derivadas, que los estudiantes de los cursos tradicionales.

En [8], se afirma que la comprensión de la noción de derivada presenta dificultades para los estudiantes. Detectan tres ámbitos en que se desarrolla la comprensión de la noción de derivada. El primero ocurre en la relación entre los conceptos básicos de razón de cambio y cociente incremental, que dan forma a la derivada de una función en un punto; el segundo en los sistemas de representación, cuya integración origina una dimensión necesaria para el desarrollo de la comprensión; el tercero en la relación entre la

derivada de una función en un punto y la función derivada y el operador derivada. [9], presentan y analizan un fenómeno que se observa en los libros de texto colombianos de física de Bachillerato cuando se introduce la velocidad. Dichos textos usan una notación (incremental y diferencial) que pone las bases de un conflicto semiótico causado por la introducción implícita de la velocidad instantánea como función, en la definición de la velocidad instantánea en un instante t_0 .

Estos antecedentes sobre las dificultades de interpretación de conceptos del cálculo de una variable y en particular el de derivada de una función en un punto o función derivada también son observados en las evaluaciones parciales o finales que se realizan a los alumnos de la Cátedra Análisis Matemático I de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas. La experiencia en la Cátedra refleja que los estudiantes, al terminar de cursar la asignatura, en general, logran un dominio aceptable de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas, pero difícilmente comprenden el significado de estos procedimientos. En base a los resultados de las evaluaciones parciales se observaron las dificultades que los alumnos presentan con respecto al concepto de pendiente de la recta tangente en un punto aplicando la definición y en encontrar la ecuación de la misma, en otros casos no realizan de manera correcta la gráfica de la función, es decir los alumnos no coordinan la parte analítica con la gráfica. Incluso no logran reconocer las ideas asociadas al concepto de derivada en la resolución de problemas elementales relacionados con la rapidez de la variación de la posición respecto del tiempo, a pesar de que en problemas de este tipo se encuentra la esencia de este concepto.

Objetivo General

De acuerdo a lo descrito precedentemente se plantea como objetivo de este trabajo:

- Proponer una secuencia didáctica en el proceso de aprendizaje del concepto derivada de una función en un punto utilizando como herramienta de apoyo el software dinámico GeoGebra en el marco de la teoría APOE.

Objetivos Específicos

- Proponer una descomposición genética del concepto derivada en el marco de la teoría APOE.

- Diseñar aplicativos matemáticos (Applets) utilizando software dinámico GeoGebra que permitan la visualización del concepto Derivada de una Función en un punto.
- Diseñar actividades que permitan aplicar el concepto de Derivada de una Función en un punto a problemas relacionados con la formación de Ingenieros.

MARCO TEÓRICO

Teoría APOE

Esta investigación está fundamentada en la teoría APOE, Dubinsky y McDonald [10] toman como base la epistemología genética de Piaget. Según [11], esta teoría nace al estudiar el mecanismo de entendimiento de la Abstracción Reflexiva piagetiana, que se refiere a la reflexión sobre las acciones y procesos que se efectúan desde un objeto de conocimiento. El proceso de investigación, en esta teoría, conlleva el realizar un modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir un concepto matemático, llamado descomposición genética. Esta consiste en una hipótesis, sobre una descripción detallada de las construcciones que los estudiantes pueden hacer para aprender un concepto. La descomposición genética se pone a prueba con los estudiantes y los datos que se obtienen, se pueden emplear para refinarla, a fin de dar cuenta de mejor manera de las construcciones de los estudiantes al aprender dicho concepto [10], y también se puede utilizar como una guía, en el diseño de material didáctico. En ese sentido, el conocimiento matemático de un individuo, es su tendencia a responder a las situaciones problemáticas, reflexionando sobre ellas y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizarlos en esquemas, a fin de manejar las situaciones, Dubinsky, citado por [12]. Se mencionan las estructuras mentales denominadas: acción, proceso, objeto y esquema, que constituyen la parte primordial de esta teoría.

Acción. Consiste en la transformación física o mental de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir [11]. Cabe recalcar que la construcción de acciones viene a ser crucial al inicio de la construcción de un concepto.

Proceso. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción

interna que ejecuta la misma acción en la mente del individuo, empero ahora, no necesariamente dirigida por un estímulo externo [11].

Objeto. Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso se dice que el proceso ha sido encapsulado en un objeto [11].

Esquema. Con respecto al logro del último nivel, se puede afirmar que un esquema para un concepto en matemática, es una colección coherente de acciones, procesos y objetos y otros esquemas relacionados entre sí, consciente o inconscientemente en la mente de un individuo, que se pueden utilizar en una situación problemática, que tiene relación con ese concepto matemático [13]. La coherencia, se refiere a que el estudiante puede decidir si alguna situación matemática se puede trabajar utilizando el esquema.

Procesos cognitivos

A continuación se definen en el marco de la Teoría APOE, los mecanismos mentales que se consideran importantes en la construcción y desarrollo conceptual dentro del pensamiento matemático avanzado.

Según [10], hay cinco tipos de abstracciones reflexivas que permiten dar lugar a las construcciones mentales descritas anteriormente, las cuales son: la interiorización, la coordinación, la encapsulación, la generalización y la reversión. La interiorización se da cuando un individuo repite una serie de acciones que le permiten crear una estructura mental sobre un procedimiento para resolver un problema, sin embargo el individuo no cae en cuenta de dicha estructura, sino que inconscientemente establece una serie de pasos los cuales realiza uno a la vez sin percatarse de estos como un proceso.

Por lo tanto, el proceso de interiorización de acciones en proceso debería convertirse en el puente que permite ir de una primera construcción mental (acción) hacia otra de un nivel más sofisticado (proceso). Ordinariamente, muchas de las actividades que se desarrollan para que los estudiantes aprendan conceptos matemáticos no contemplan el paso de una construcción mental a otra. Es decir, que no están diseñadas teniendo en cuenta el desarrollo cognitivo de los estudiantes,

por el contrario se muestran desconectadas entre sí y lo que propician es la memorización de técnicas y algoritmos que permiten solucionar un tipo concreto de ejercicios, pero que no llegan a interiorizarse en procesos.

La coordinación se refiere a la capacidad de establecer relaciones entre dos o más procesos de manera que se pueda generar un nuevo proceso a través de las relaciones lógicas establecidas.

La encapsulación consiste en una reflexión acerca de la serie de acciones y procesos empleados para responder a un problema de manera que se consideran como un todo, es decir, se llega a algo estático.

La desencapsulación es el proceso inverso de la encapsulación e incluye a la generalización y reversión. En este tipo de abstracción se descompone el objeto encapsulado y se cae en cuenta de las acciones y procesos que permitieron comprenderlo como un todo.

Cuando un sujeto aprende a aplicar un esquema ya existente a una gran colección de fenómenos, se dice que el esquema ha sido generalizado. Esto puede ocurrir porque el sujeto se da cuenta de la mayor aplicabilidad del esquema. De igual forma, esto también puede ocurrir cuando un proceso es encapsulado en un objeto [10].

Descomposición genética

Esta teoría propone la búsqueda de la reflexión por parte de los individuos a la hora de aprender y comprender los conceptos matemáticos más que la memorización acrítica de técnicas y algoritmos independientemente del grado de sofisticación que tengan estos, [14]. La descomposición genética según [14], es el eje de la aplicación de la teoría APOE en estudios sobre la comprensión de objetos matemáticos porque permite estructurar el concepto matemático, orienta la organización del contenido a enseñar y el diseño de actividades y tareas que contribuyan a la construcción de las estructuras que se busca que los estudiantes desarrollen. Además es el punto de partida para la construcción de unidades didácticas.

En [11], plantean que la descomposición genética de un concepto matemático es un conjunto estructurado de constructos mentales, los cuales pueden describir cómo el concepto puede ser desarrollado en la mente del individuo.

[15] señalan que la descomposición genética introduce al profesor en una reflexión epistemológica y didáctica del concepto, que permite, cuestionar y mejorar la comprensión

que tiene del concepto, usar y organizar dicho conocimiento en la estructuración de la enseñanza del mismo, orientar el aprendizaje de los estudiantes hacia los procesos de construcción y reconstrucción de los conceptos matemáticos que espera que sus estudiantes desarrollen.

Gimenez y Machin, [16], sugieren que para la elaboración de una propuesta de una descomposición genética determinada, se considera que la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales, previamente construidos, para formar acciones; entonces las acciones se interiorizan para formar procesos, los cuales se encapsulan para formar objetos.

A su vez los objetos pueden ser desencapsulados hacia los procesos a partir de los cuales fueron formados. Finalmente las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas. Las construcciones son las Acciones, los Procesos, los Objetos y los Esquemas, mientras que los mecanismos para hacer esas construcciones son las siguientes: interiorización, coordinaciones, reversiones, encapsulaciones y desencapsulaciones. En definitiva, con los conceptos de acción, proceso, objeto, esquema y los mecanismos de construcción se describe lo que se denomina la descomposición genética de un concepto.

En el estudio que se muestra, la descomposición genética será un pilar fundamental puesto que permitirá hacer un análisis teórico del objeto matemático, y activará la reflexión por parte de los docentes en función de mejorar y orientar su actuación en las aulas de clases desde el punto de vista cognitivo y didáctico.

En un principio, son los investigadores quienes proponen, basados en su experiencia en el aula, una descomposición genética del concepto por estudiar; posteriormente, a través de la propia investigación, dicha descomposición se refina de modo que explique de mejor manera, la forma en que aprenden los estudiantes cuando trabajan con un concepto matemático. “Es importante aclarar que no existe una descomposición genética única, ya que esta depende de la formulación que ha hecho el investigador. Pueden coexistir varias descomposiciones genéticas del mismo concepto”, según afirma [13, p8]. Lo que importa es que cualquier descomposición genética, sea un instrumento que dé cuenta del comportamiento observable del sujeto.

METODOLOGÍA

Implementación

Las actividades propuestas se desarrollaran en la Cátedra de Análisis Matemático I correspondiente al Primer Año de las carreras de Ingeniería en Electrónica, Agrimensura, Informática y Minas de la Facultad de Tecnología y Cs. Aplicadas.

La labor docente en la enseñanza y aprendizaje presenta algunas dificultades en el proceso, resaltando la instrucción simultánea de muchos alumnos, en el caso de primer año de ingeniería se cuenta con una masa de alumnos de aproximadamente 180 ingresantes y un promedio de 60 alumnos recursantes.

Las clases teóricas (4 horas semanales) se desarrollan no solo con la presentación de los temas curriculares netamente, sino en conjunto con ejemplos prácticos, esto no solo estimula y facilita el uso de múltiples formas de conocimiento sino que hace evidente que no siempre existe una única solución correcta aunque todos los caminos conducen a la misma conclusión. En las clases prácticas (2 horas semanales) se evidencia el trabajo en grupo, lo que promueve el tipo de actividades colaborativas, estimula el intercambio, el debate y los trabajos conjuntos entre los alumnos como fuente de conocimiento donde el profesor es parte del mismo y es quien guía este proceso.

Para llevar a cabo la implementación de la propuesta se formulan las siguientes actividades:

- Rediseñar guías de trabajos prácticos con problemas de aplicación a la Ingeniería donde se aplique el concepto de derivada de una función.
- Proponer actividades con Geogebra para visualizar el concepto de derivada.
- Desarrollar actividades de autoevaluación en el aula virtual utilizando la plataforma Moodle.
- Implementar Talleres Teórico - Prácticos.

En esta fase de implementación se trabajará en cinco aspectos del proceso de enseñanza aprendizaje.

SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICO GEOGEBRA

Generalidades

GeoGebra es un software libre que permite la construcción y manipulación de construcciones geométricas en el plano como en el espacio. En pantalla se pueden observar simultáneamente

diferentes ventanas que corresponden a la vista geométrica, la vista algebraica y también se puede anexar una planilla de cálculos. Con GeoGebra pueden realizarse construcciones a partir de puntos, rectas, segmentos, vectores, permitiendo también el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas e integrales. El carácter dinámico de este aplicativo permite modificar parámetros y observar los respectivos resultados de ello tanto en la vista geométrica como algebraica.

El software de matemáticas dinámicas de código abierto y multiplataforma [17] trata de combinar la facilidad del uso del software de geometría dinámica con la versátil posibilidad de los sistemas de álgebra computacional. La idea básica del software es articular la geometría, el álgebra, y el cálculo, en un único paquete fácil de usar para aprender y enseñar matemáticas desde la primaria hasta la universidad.

GeoGebra puede ayudar a los estudiantes a captar el aprendizaje experimental, orientado a problemas y orientado a la investigación de matemáticas, tanto en el aula como en el hogar. Los estudiantes pueden utilizar simultáneamente un Sistema de Álgebra Computacional (CAS) y un Sistema de Geometría Dinámica (DGS), al hacer esto, pueden aumentar sus habilidades cognitivas de la mejor manera.

Londoño [18] hace referencia a la realización de gráfica de funciones, estudio del criterio de la primera y segunda derivada para hallar puntos críticos. Este proyecto se realizó usando la tecnología computacional, específicamente con el software GeoGebra. Para la propuesta se diseñaron hojas de trabajo en las cuales los alumnos interactuaban simultáneamente con ellas y con el software, responden preguntas, analizan los resultados que obtienen para establecer una conjetura respecto a los conceptos mediante la visualización de máximos y mínimos de una función, y posteriormente los alumnos logren interpretar geoméricamente la derivada.

En [19] buscan mejorar la comprensión del concepto de derivada mediante una propuesta metodológica que involucre mecanismos de tipo visual-geométrico, para optimizar la integración de los conceptos matemáticos interactuando con el software GeoGebra. La relación existente entre la derivada como un límite y la tasa de variación media, permitirá la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente a la

curva y su posterior generalización

Descripción de las vistas gráfica y algebraica de Geogebra

La característica más destacable de GeoGebra es la doble percepción de los objetos, ya que cada objeto tiene dos representaciones, una en la Vista Gráfica (Geometría) y otra en la *Vista Algebraica* (Álgebra). De esta forma, se establece una permanente conexión entre los símbolos algebraicos y las gráficas geométricas. Todos los objetos que se incorporan en la zona gráfica le corresponderán una expresión en la ventana algebraica y viceversa. (Ver Figura 1).

A continuación se describen las dos presentaciones de cada objeto matemático en su vista algebraica y su vista gráfica.

En la vista gráfica pueden realizarse construcciones geométricas, empleando las herramientas de construcción disponibles en la barra de herramientas. Todo objeto creado en la vista gráfica, tiene también su correspondiente representación en la vista algebraica.

Desde la barra de estado de Geogebra pueden ingresarse directamente expresiones algebraicas, que aparece en la Vista Algebraica y, automáticamente, su representación en la Vista Gráfica. Por ejemplo, al ingresar $f(x) = x^2$ aparece la función cuadrática en la vista algebraica y el gráfico de la parábola en la vista gráfica.

En la vista algebraica, se distinguen los objetos matemáticos libres de los dependientes. Es libre todo nuevo objeto creado sin emplear ninguno de los ya existentes, y recíprocamente, será dependiente, el que deriva de alguno previo. En ese sentido [20] afirma: *La visualización que es posible con el software dinámico Geogebra permite al estudiante ver y explorar relaciones y conceptos matemáticos que fueron difícil de "mostrar" antes de la tecnología. El objetivo de usar GeoGebra es proporcionar un entorno para la exploración activa de estructuras matemáticas a través de múltiples representaciones, o para mostrar a los estudiantes algunos aspectos de las matemáticas que no son posibles con lápiz y papel.* [20, p. 193]

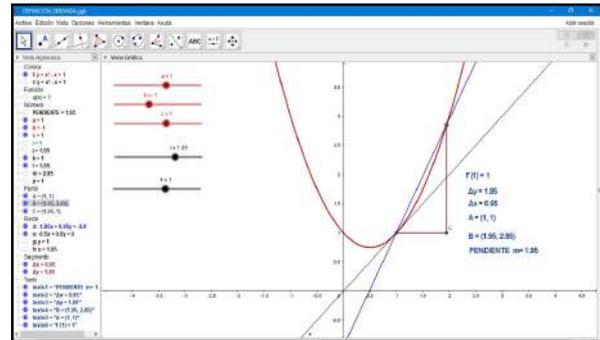


Figura 1. Vista algebraica y geométrica de GeoGebra.

Descripción de los aplicativos diseñados

Derivada de una función en un punto con Geogebra

Se describen en este capítulo dos aplicativos de elaboración propia de la derivada de una función en un punto los cuales se diseñaron con el objetivo de facilitar la comprensión del concepto a través de la visualización que permite el software dinámico Geogebra. Estos aplicativos de elaboración propia se denominan APPLETS.

Este aplicativo dinámico (Figura 2) permite mediante los deslizadores de color rojo modificar los coeficientes a , b y c de la función cuadrática y los deslizadores negros corresponden a los puntos i , k que son los que definen la recta secante a la gráfica de la función. Se puede observar en la pantalla los coeficientes Δy y Δx ; cuando el coeficiente Δx tiende a cero (se desplaza el punto k hacia el punto i para obtener la recta tangente a la curva en i como el límite de la recta secante que pasa por los puntos i , k) y así el valor de la pendiente de la recta secante se acerca a $f'(k)$, es decir a la derivada de la función en un punto. Con este aplicativo se puede observar como la recta secante se aproxima a la recta tangente cuando el punto k se aproxima a i , con lo cual el alumno puede visualizar el concepto de pendiente de la recta tangente en un punto. (Figura 2). Este applet busca lograr en el alumno la interpretación del concepto de derivada de una función en un punto, la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto como el límite del cociente incremental $\Delta y/\Delta x$ cuando Δx tiende a cero.

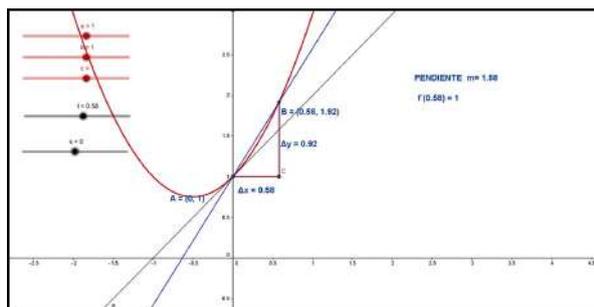


Figura 2. Vista Geométrica de Geogebra del concepto Derivada de una Función en un punto.

Comportamiento de una función y su derivada con Geogebra

El segundo aplicativo diseñado permite visualizar una función cúbica y su función derivada, los puntos críticos de la función, los intervalos donde la función es creciente, donde la función es decreciente.

Los deslizadores en azul a, b, c y d describen una función cúbica, y el deslizador que corresponde al valor de k representa la abscisa del punto donde se quiere encontrar la recta tangente, este deslizador es dinámico ya que a medida que el valor de k se mueve la recta tangente varía en cada punto de la gráfica de la función. En la parte inferior se observan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función cubica, de acuerdo al signo de la derivada. La visualización dinámica de la recta tangente permite identificar los puntos donde la derivada es positiva, donde la derivada es negativa y donde la derivada es nula. (Figura 3) De esa manera a través de una secuencia de tareas que el alumno debe realizar, se puede determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ de acuerdo al signo de la derivada, asimismo se pueden determinar gráficamente los puntos donde la derivada $f'(x)$ es nula, en correspondencia con los puntos críticos de la función $f(x)$.

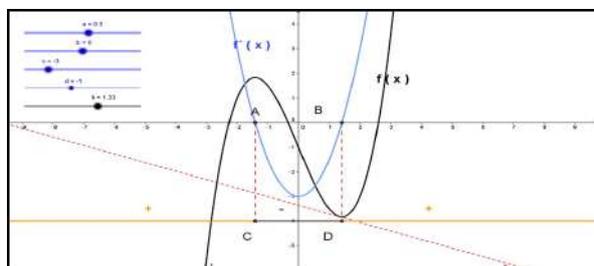


Figura 3. Vista Geométrica de Geogebra sobre el comportamiento de una Función y su Derivada.

PROPUESTA DIDÁCTICA DE INNOVACIÓN EDUCATIVA

Fase de Planeación

Identificación del problema

El problema consiste en la interpretación del concepto de derivada. Las dificultades que se observan con respecto al concepto de pendiente de la recta tangente en un punto muestran que algunos alumnos encuentran la pendiente de la recta tangente aplicando la definición y su ecuación, pero no realizan correctamente la gráfica de la función y la recta tangente en el punto dado; y en otros casos determinan correctamente la pendiente de la recta tangente pero no obtienen la ecuación de la recta, ya que no advierten que dado el valor de $x = a$ pueden encontrar $f(a)$ para determinar la ecuación de la recta; en otros casos no determinan correctamente la pendiente de la recta tangente aplicando la definición.

Se observa una falta de coordinación entre los caminos algebraico y gráfico de la definición de derivada de una función en un punto, de acuerdo a la descomposición genética que se describe en este capítulo.

Con respecto al concepto de derivabilidad de una función en un punto los alumnos logran identificar los valores donde no es derivable la función pero no justifican correctamente su respuesta y en otros casos no reconocen todos los puntos donde la función no es derivable. Sobre el concepto de velocidad y aceleración los alumnos encuentran algebraicamente la función velocidad y aceleración aplicando el concepto de primera y segunda derivada respectivamente, pero cometen errores de cálculo al reemplazar el valor de t en la función dada. Con respecto a las técnicas de derivación se observa que presentan mayores dificultades en la aplicación de la Regla de la cadena, que en resolver la derivada de un cociente aplicando las reglas de derivación, los alumnos logran seguir pasos algebraicos para resolver una regla de derivación, pero se observaron dificultades en la resolución de la derivada de una función compuesta, donde debe advertir la aplicación de la Regla de la cadena que requiere de la asociación de conceptos

Diseño de la propuesta de innovación

La propuesta de innovación consiste en formular una secuencia didáctica del concepto derivada de una función en un punto, utilizando como herramienta de apoyo el software dinámico

GeoGebra en el marco de la teoría APOE. Para llevar a cabo esta propuesta se plantearon los siguientes objetivos específicos:

- Proponer una descomposición genética del concepto derivada en el marco de la teoría APOE.
- Desarrollar aplicativos matemáticos (Applets) utilizando software dinámico GeoGebra que permitan la visualización del concepto derivada de una función en un punto.
- Desarrollar actividades, acordes con la formación de ingenieros, que permitan aplicar el concepto de derivada de una función en un punto.
- Elaborar una secuencia didáctica del concepto de derivada de una función en un punto.

Descomposición genética

En este trabajo se consideran como referencias las descomposiciones genéticas de [9]. En el trabajo [11] sugieren que hay dos trayectorias que se relacionan entre sí, gráfica y analítica, a partir de las cuales se construye el concepto de derivada. También se tuvo en cuenta el trabajo de Gutiérrez [21].

1.a) Acción de trazar la recta secante de una curva que pasa por dos puntos P y Q.

1.b) Acción de obtener analíticamente la pendiente de la recta secante que pasa por dos puntos.

2.a) Interiorización de la acción 1. a) en un proceso, de trazar la recta secante a una curva que pasa por dos puntos P y Q, que se convierte en recta tangente cuando Q se aproxima a P.

2.b) Interiorización de la acción 1. b) en un proceso, obteniendo analíticamente la pendiente de la recta tangente a través del cálculo del límite del cociente incremental.

3. Coordinación de los procesos 2. a) y 2. b) para obtener la derivada de una función en un punto. Este proceso lleva implícito el concepto de límite de una función en un punto.

4. Encapsulado de 3. en un objeto para interpretar la derivada de una función en punto como la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

5. Coordinación de los procesos 2. a) y 2. b) en varias situaciones relacionadas con la derivada de una función en un punto, presentadas en diferentes contextos.

6. Interiorización de la derivada en un punto en el proceso de construir la función derivada, la cual toma como entrada el punto y produce en la salida el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, para cualquier punto del

dominio, si el límite existe.

7. Encapsulación del proceso del punto 6. para producir la función derivada como un nuevo objeto complejo (que implica el proceso de síntesis del objeto derivada en un punto).

Desarrollo de aplicativos matemáticos (applets) utilizando software dinámico geogebra

Se desarrollaron dos aplicativos matemáticos utilizando software dinámico Geogebra los cuales permiten a través de su vista gráfica y algebraica la visualización del concepto de derivada de una función en un punto.

El primer aplicativo permite visualizar la derivada de una función desde el punto de vista analítico como el límite del cociente incremental cuando Δx tiende a cero, en la vista gráfica se puede observar como la recta secante se aproxima a la recta tangente cuando el punto k se aproxima a i , de esta manera el alumno puede visualizar el concepto de pendiente de la recta tangente en un punto.

A continuación, se muestra la secuencia del primer aplicativo:

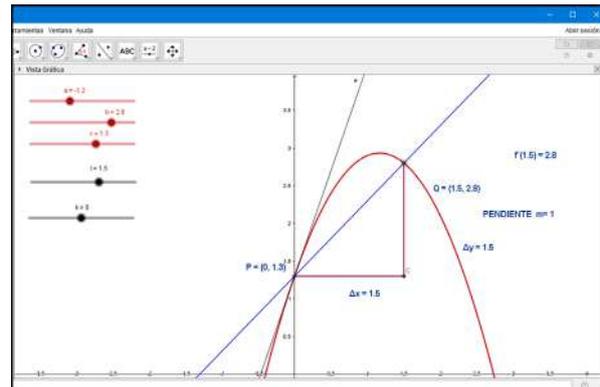


Figura 4. Vista gráfica Secuencia del Primer Aplicativo. Captura 1.

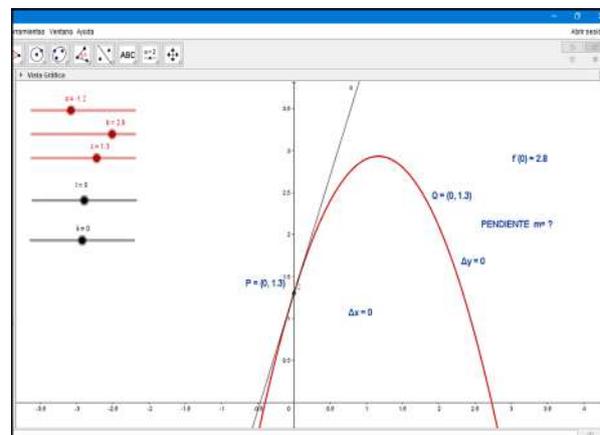


Figura 5. Vista gráfica Secuencia del Primer Aplicativo. Captura 2.

Lo que se logra con el aplicativo de Geogebra es que el alumno interiorice el concepto de derivada como el límite del cociente incremental y el concepto de pendiente de la recta tangente en un punto, coordinando los caminos analítico y gráfico para comprender el concepto de la derivada de la función en un punto de acuerdo con la Teoría APOE.

Camino analítico: en el nivel acción el alumno interioriza la definición de límite del cociente incremental cuando observa como $\Delta y/\Delta x$ tiende a cero, para transformarlo en un proceso.

Camino gráfico: en el nivel acción el alumno interioriza el concepto de pendiente de la recta tangente en un punto al visualizar la recta secante que pasa por dos puntos y a medida que el punto k se aproxima a i , se transforma en recta tangente para transformarlo en proceso.

Cuando el alumno logra la coordinación del camino analítico con el camino gráfico interpreta y comprende el concepto de derivada de una función en un punto, es decir se transforma en proceso.

El siguiente esquema muestra lo descripto anteriormente:

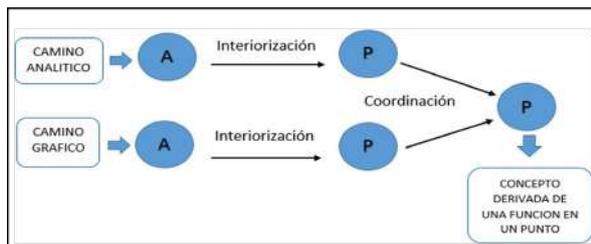


Figura 6. Coordinación de los caminos analíticos y gráficos se acuerdo a la teoría APOE.

El segundo aplicativo permite visualizar una función cúbica y su función derivada, los puntos críticos de la función, los intervalos donde la función es creciente, donde la función es decreciente y el deslizador que corresponde al valor de K representa la tangente en cualquier punto, el cual es dinámico ya que a medida que el deslizador k se mueve la recta tangente varía en cada punto de la gráfica de la función. En Figura 7 se muestra la vista gráfica y algebraica del segundo aplicativo.

A continuación, se muestra el segundo aplicativo:

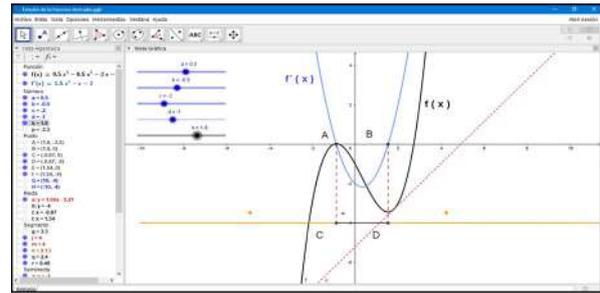


Figura 7. Vista gráfica y algebraica del Segundo Aplicativo. Fuente: elaboración propia.

El segundo aplicativo permite visualizar para cualquier función cubica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función simultáneamente con el grafico de la función derivada, lo que permite visualizar los máximos y mínimos de $f(x)$.

Desde el marco de la teoría APOE el segundo aplicativo permite que el alumno visualice la función derivada $f'(x)$ simultáneamente con la pendiente de la recta tangente en un punto 'a' del dominio de dicha función, es decir que reconozca $f'(a)$ y de esta manera interiorice en un proceso el concepto de la función derivada, que permite calcular la pendiente de la recta tangente para todo punto del dominio de la función.

A su vez para que el alumno logre encapsular en un objeto el concepto de función derivada, el alumno utilizando $f'(x)$ puede determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ los que a su vez conlleva a determinar los puntos críticos (máximos y mínimos) y los puntos de inflexión. En esta etapa el alumno ha encapsulado como un objeto el concepto de función derivada.

El siguiente esquema muestra lo descripto anteriormente:

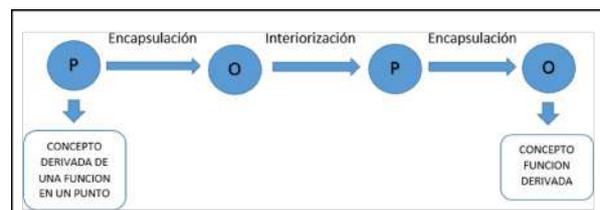


Figura 8. Encapsulación del concepto de función derivada según teoría APOE.

FASE DE IMPLEMENTACIÓN

Clases teórico - prácticas

Se implementarán las clases Teórico - Prácticas en las cuales no solo se desarrollara la presentación de las unidades curriculares, sino en forma

conjunta con ejemplos prácticos, con el objetivo de coordinar simultáneamente lo conceptual con la práctica y de esta manera estimular y facilitar la comprensión de los conceptos, especialmente el de derivada de una función en un punto, ya que se observaron las dificultades que presentan los alumnos en la comprensión de él mismo, dado que logran mecanizar los algoritmos para resolver derivadas pero no llegan a comprender su concepto. El objetivo es trabajar simultáneamente con ejercicios guiados en las clases Teóricas - Prácticas, siguiendo el marco de la teoría APOE y utilizando el software dinámico Geogebra para la visualización a través de applets lo cual facilitará la comprensión y a su vez la visualización de este concepto fundamental del cálculo Diferencial.

Clases prácticas

Para llevar a cabo la implementación de las nuevas guías de Trabajos Prácticos se diseñan actividades donde el alumno aplicará el concepto de derivada de una función en el marco de la teoría APOE, siguiendo mediante las actividades propuestas los caminos gráfico y analítico para lograr la coordinación de estas acciones y así encapsular en

un objeto el concepto de derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

Las actividades propuestas se desarrollarán con diferentes grados de dificultad de lo simple a lo complejo, de lo particular a lo general, para que el alumno logre primeramente el encapsulamiento del concepto derivada de una función en un punto y seguidamente interiorizar y encapsular el concepto de función derivada.

Se proponen conjuntamente actividades con problemas de aplicación a la Ingeniería que involucren el concepto de derivada de una función en un punto.

Las actividades propuestas se realizarán en forma simultánea con la utilización del software dinámico Geogebra lo cual permitirá al alumno la visualización en secuencia para llegar a la construcción del concepto de derivada de una función en un punto en el marco de la teoría APOE. Las actividades 1 y 2 con Geogebra son de carácter obligatorio y complementaria con los trabajos prácticos.

En el Cuadro 1 se detallan las actividades propuestas en el marco de la teoría APOE:

Tabla 1: Actividades prácticas a desarrollar por alumnos.

CAMINO ANALITICO	CAMINO GRAFICO	ACTIVIDAD PROPUESTA	ACTIVIDAD CON GEOGEBRA
1) a) Acción de obtener analíticamente la pendiente de la recta secante que pasa por dos puntos.	1) b) Acción de trazar la recta secante de una curva que pasa por dos puntos P Y Q.	1) Determinar la ecuación de la recta secante a la curva que pasa dos puntos. Realizar la gráfica de la recta secante a la curva.	
2) a) Interiorización de la acción 1 a) en un proceso, obteniendo analíticamente la pendiente de la recta tangente a través del cálculo del límite del cociente incremental.	2) b) Interiorización de la acción 1 b) en un proceso, de trazar la recta secante a una curva que pasa por dos puntos P y Q, que se convierte en recta tangente cuando Q se aproxima a P.	2) Determinar la pendiente de la recta tangente a la curva que pasa por un punto, utilizando la definición. Graficar la ecuación de la recta tangente. Mostrar en un mismo gráfico la recta secante y la recta tangente a la gráfica de la función.	
3) Coordinación de los procesos 2 a) y 2b) para obtener la derivada de una función en un punto.		3) Encontrar la derivada de la función aplicando la definición y luego calcular la derivada en un determinado punto.	Actividad 1 con Geogebra.
4) Encapsulado de 3) en un objeto para interpretar la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente en dicho punto.		4) Comparar el resultado obtenido en la actividad 2 y 3.	Actividad 1 con Geogebra.
5) Interiorización de la derivada en un punto en el proceso de construir la función derivada, la cual toma como entrada el punto y produce en la salida el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, para cualquier punto del dominio de la función, si el límite existe.		5) Ejercicios para determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función, máximos y mínimos utilizando el criterio de la primera derivada.	Actividad 2 con Geogebra.
6) Encapsulación del proceso del punto 5 para producir la función derivada como un nuevo objeto complejo (que implica el proceso de síntesis del objeto derivada en un punto).			Actividad 2 con Geogebra.

Talleres de resolución de problemas

A continuación se detalla la Propuesta del Taller denominado: La construcción del concepto de derivada en el marco de la Teoría APOE.

Presentación

El tema del Taller corresponde a la Unidad N° 5: Derivada de una función, correspondiente al Programa Analítico de la Cátedra de Análisis Matemático I, dirigido a los alumnos de Primer Año de las Carreras de Ingenierías de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la UNCA. El dictado del Taller estará a cargo de los docentes de la Catedra, en el que se proponen 3 encuentros para el desarrollo de los temas, con una duración de 2 horas cada encuentro y una cantidad de 20 alumnos participantes.

Fundamentación

A partir de las dificultades que se observan en el proceso de enseñanza- aprendizaje del cálculo diferencial sobre la construcción del concepto de derivada, se considera necesario caracterizar diferentes niveles de comprensión, a partir de distintos tipos de tareas propuestas a los estudiantes, con el propósito de modificar, los procesos de

instrucción en favor de la comprensión de dicho concepto; este taller pretende la identificación de diferentes niveles de comprensión de la derivada.

Objetivos

El Taller tiene como objetivo general analizar como los alumnos logran comprender el concepto de la derivada desde el punto de vista de la teoría APOE.

Contenidos

Conceptos previos: Funciones, límites, recta secante, recta tangente, pendiente de una recta. Concepto de derivada. Aplicaciones de la derivada de una función. Recta tangente de una función en un punto velocidad media y velocidad instantánea. Tasa de variación.

Estrategias

Realizar actividades vinculadas a los contenidos asociados a la descomposición genética del concepto de derivada, formando grupos de trabajo para el aprendizaje colaborativo.

Resolver problemas donde se aplique el concepto de derivada a situaciones de la vida cotidiana.

Utilizar Recursos de Tecnologías de la Información y Comunicación (TICs) para la visualización dinámica de gráficas. (Geogebra)

PROGRAMACIÓN DE ACTIVIDADES

Tabla 2: Secuencia de contenidos a desarrollar en los talleres.

Contenido	Estrategia	Actividades
Recta secante	Clase Teórica – Práctica Uso de software dinámico Geogebra. Explicación con diapositivas.	Encontrar la ecuación de la recta secante que pasa por dos puntos. Graficar.
Recta tangente	Clase Teórica – Práctica Uso de software dinámico Geogebra. Explicación con diapositivas.	Determinar la ecuación de la recta tangente que pasa por un punto determinado, conociendo su pendiente. Graficar.
Pendiente de la recta tangente	Clase Teórica – Práctica Uso de software dinámico Geogebra. Explicación con diapositivas.	Determinar la pendiente de la recta utilizando la definición. Determinar la ecuación de la recta tangente. Graficar.
Derivada de una Función	Clase Teórica – Práctica Uso de software dinámico Geogebra. Explicación con diapositivas. Resolución de problemas de cinemática.	Utilizar la definición de derivada de una función para determinar $f'(x)$.
Aplicaciones de la derivada de una función:	Clase Teórica – Práctica Uso de software dinámico Geogebra. Explicación con diapositivas. Resolución de problemas aplicando movimiento rectilíneo uniforme.	Resolver situaciones problemáticas para calcular la velocidad media y la velocidad instancia.
Aplicaciones de la derivada de una función	Clase Teórica – Práctica Uso de software dinámico Geogebra. Explicación con diapositivas. Resolución de problemas aplicando tasa de variación instantánea.	Resolver situaciones problemáticas vinculadas a la formación de Ingenieros, para determinar la tasa de variación instantánea.

Recursos didácticos

Se trabajará con bibliografía específica de la Cátedra y con textos pertenecientes a los diferentes campos del conocimiento.

Se confeccionarán cuestionarios y entrevistas para la etapa de evaluación proceso. Se utilizará el software dinámico Geogebra, para el desarrollo de las Clases Teórico - Prácticas, además de la utilización de data y pizarra para el desarrollo de conceptos y aplicaciones de los contenidos propuestos.

Actividades con Geogebra Actividad N° 1

El objetivo es visualizar como la recta secante se aproxima a la recta tangente a medida que Δx tiende a cero. Se plantean las siguientes actividades para los alumnos:

- Definir una función cuadrática a través de los coeficientes a , b y c mediante los deslizadores.
- Definir dos puntos sobre la curva j y k , mediante los deslizadores.
- Definir el cociente incremental Δx y Δy
- Analizar la variación de la pendiente de la recta secante acercando el punto j al punto k , y observar como varia el valor de la pendiente de la recta secante que es el cociente $\Delta y/\Delta x$, hasta lo máximo se pueda aproximar sin que el cociente sea indeterminado.
- Calcular analíticamente el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto j
- Comparar resultados.

En Figura 9 se presenta una captura de pantalla del applet correspondiente a esta actividad.

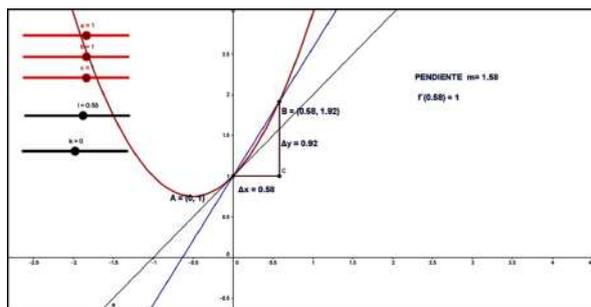


Figura 9. Actividad N° 1 con Geogebra. Fuente: elaboración propia.

Actividad N° 2

El objetivo es visualizar la función y su derivada, reconociendo los intervalos donde la función es creciente, decreciente y los extremos relativos de la función (máximos y mínimos). Se plantean las siguientes actividades para los alumnos:

- Definir una función cubica a través de los coeficientes a , b , c y d mediante los deslizadores.
- Observar los intervalos donde la función es creciente y decreciente, analizando los signos de la derivada donde se puede visualizar si la misma es positiva, negativa o cero.
- Determinar en función de lo observado, la abscisa de los máximos y mínimos relativos correspondientes a la función.
- Definir el deslizador k , el cual permite observar la pendiente de la recta tangente en cualquier punto del dominio de la función.

En Figura 10 se presenta una captura de pantalla del applet correspondiente a esta actividad.

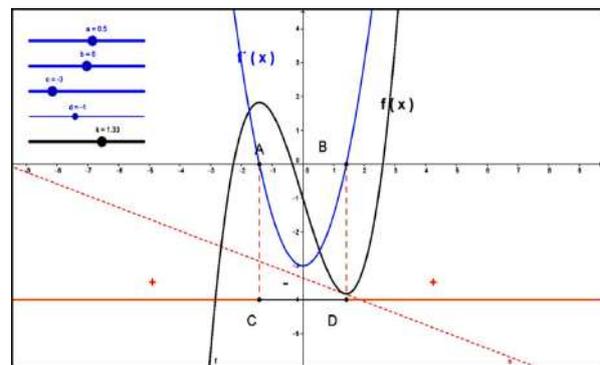


Figura 10. Actividad N° 2 con Geogebra. Fuente: elaboración propia.

Uso del aula virtual

Las actividades a desarrollar a través de la aula virtual consisten en autoevaluaciones con preguntas de opción múltiple utilizando la plataforma Moodle, las cuales tienen por objetivo el autoaprendizaje de los alumnos. En este caso la retroalimentación de las respuestas es inmediata permitiendo así que detecten sus errores y/o dificultades y sean capaces de realizar una autocorrección.

Fase de evaluación

La fase de evaluación comprende los momentos de seguimiento de la aplicación de las diferentes actividades que constituyen la propuesta de innovación pedagógica y la evaluación general de la propuesta. En esta fase adquiere pleno sentido los principios de dirección y carácter, tiene en el momento del seguimiento su principal actividad a desarrollar, ya que si se toma en consideración que la innovación tiene una direccionalidad no lineal no es posible realizar simplemente una evaluación final que se circunscriba a los resultados sin tener en cuenta el proceso y las eventualidades

propias de toda puesta en marcha de un proyecto o propuesta de innovación.

Fundamentación

Respecto a la evaluación [22, p.143] la define de la siguiente manera:

Se define a la evaluación didáctica como un proceso que, a partir del conocimiento y comprensión de cierta información, permite, desde una actitud dialógica, emitir un juicio de valor a cerca de las prácticas de enseñanza y aprendizaje en un contexto socio histórico determinado en el cual intervienen la institución, el objeto de conocimiento, el grupo de alumnos, el docente y que posibilita tanto el tomar decisiones referidas a las prácticas de referencia como exige comunicar a docentes y alumnos – por medio de enunciados argumentativos – el juicio de valor emitido y las orientaciones que derivan de este, resulten necesarios para la mejora de la práctica.

Criterios de evaluación

Es necesario decidir qué evaluar de las prácticas de la enseñanza, y para ello se considera algunos de los aspectos sobre los criterios de evaluación. La determinación de los criterios tiene una triple función. En primer lugar integra la decisión metodológica que se realiza desde la cátedra con la evaluación, dando por supuesto que, si se espera obtener cierta cualidad, esta deberá ser trabajada en la cursada. Como ejemplo si en el trabajo con los contenidos de una unidad curricular se considera que los alumnos deben lograr resolver situaciones problemáticas que integren teoría con práctica, entonces se trabaja durante el cursado con dichas situaciones a fin de facilitar que los alumnos aprendan a resolverlas.

En segundo lugar los criterios funcionan, para la propia cátedra, como el eje desde el cual plantear la evaluación con función de acreditación y como un elemento de monitoreo entre aquello que espera se incorpore como aprendizaje y la verificación del mismo.

En tercer lugar los criterios explicitados orientan a los alumnos ya que contarán con una descripción cualitativa de cómo encarar su aprendizaje con relación a los contenidos.

La evaluación basada en criterios previamente establecidos, permite al docente hacer un análisis de resultados de aprendizaje más íntegro dentro de un mismo objetivo para conocer en qué medida cada uno de sus alumnos ha logrado los conocimientos o

competencias específicas y por ende cuánto de los contenidos vistos en clases han sido efectivamente entendidos. Por otra parte, que el docente conozca anticipadamente y específicamente lo que se espera que logren los alumnos facilita su tarea en el desarrollo del material didáctico efectivo para su asignatura, en la medida en que sus guías de aprendizaje, ejercicios y otros estén asociados a las pautas de evaluación preestablecidas. Estos criterios de evaluación deben ser entregados a los alumnos desde un inicio, es decir, previo al proceso de enseñanza y aprendizaje, de esta forma los alumnos y docentes comprenden y pretenden lo mismo en las situaciones de evaluación, lo que facilita al docente elaborar pruebas más justas y a los alumnos estudiar mejor y tener mayores opciones de obtener buenos resultados.

Momentos de la evaluación

La evaluación inicial o diagnóstica tiene por finalidad tomar conocimiento del estado de situación de partida en relación con los saberes apropiados por los alumnos y obtener cierta información sobre ellos, que resultan necesarias para tomar decisiones relativas a la enseñanza y que opera como un insumo de contexto en la construcción de la clase: ¿a quienes se enseña? ¿En qué tipo de prácticas sociales, laborales, culturales participan? ¿Qué saberes disponen de este tipo de conocimiento?

La evaluación de seguimiento o formativa tiene que dar cuenta de un proceso que permita comprender como el alumno se está enfrentando cognitivamente [23] con la tarea que se le viene proponiendo. Fundamentalmente, tiene que promover la autoevaluación, es decir, tiene que permitir a los propios alumnos la toma de conciencia del proceso de aprender [24], los propios juicios de valor respecto a que, como y cuando se está aprendiendo. Se necesita, desde la evaluación de seguimiento, detectar errores para orientar a tiempo el proceso de aprender. Para que esto sea posible, es necesario poner a los alumnos en situaciones activas de aprender.

La evaluación final o sumativa involucra la evaluación final, las prácticas de evaluación para la acreditación: las evaluaciones parciales y finales. Es la evaluación de cierre del cursado y adquiere formatos diferentes según los casos. [22]

Tipos de evaluación

Casanova [25] refiere que la autoevaluación

se produce cuando el sujeto evalúa sus propias actuaciones, es un tipo de evaluación que toda persona realiza a lo largo de su vida; en este caso, es de suma importancia que el alumno realice de forma continua ejercicios de valoración de su aprendizaje, de manera que le sea posible identificar aspectos que debe mejorar. En la medida en que un alumno logre contrastar sus avances contra estándares de actuación establecidos, podrá identificar áreas de mejora, con lo cual estará en condiciones de regular su aprendizaje hacia el logro de competencias útiles para su desarrollo social y profesional.

La coevaluación, la describe como la evaluación mutua, conjunta de una actividad o trabajo determinado realizado entre varios. En este caso, lo recomendable es que después de una serie de actividades didácticas, los participantes tanto alumnos como el profesor evalúen ciertos aspectos que consideren importantes de tal actuación conjunta. Generalmente tras un trabajo en equipos, de manera natural, cada uno valora lo que le ha parecido más interesante de los otros, por ejemplo se puede valorar si las actividades resultaron atractivas, si el contenido del trabajo realizado es pertinente, si el nivel de colaboración facilitó el logro de los objetivos, etc.; es muy importante en la conducción de estos procesos de coevaluación pedir a los alumnos que se centren en la valoración tanto de los aspectos positivos o que ellos consideren como los más destacados, como en aquellos que es necesario trabajar más para mejorar la calidad del trabajo desarrollado en conjunto.

La heteroevaluación consiste en la evaluación que realiza una persona sobre el trabajo, actuación o rendimiento de otra persona. Es aquella que habitualmente hace el profesor de sus alumnos. Dado que es un proceso importante e imprescindible de control en los esquemas y modelos educativos vigentes, rico por los datos y posibilidades que ofrece, delicado por el impacto que tiene en las personas evaluadas, y complejo por las dificultades técnicas que supone la emisión de juicios de valor válidos y objetivos; es que se propone esta guía práctica para profesores.

Instrumentos de evaluación

El instrumento debe presentar el grado de organización suficiente para que la apreciación que efectúa del aprendizaje permita desprender algunas conclusiones acerca del desempeño presente y futuro del alumno, en cuestiones específicas,

pero también como visión integral. Cada uno de los instrumentos de evaluación resuelve estos problemas de diversas maneras. Actúa como un reflector que en el escenario ilumina a algunos personajes y deja en penumbra a otros, que sin embargo están allí presentes, pero con una clase diferente de presencia. Por esta razón, la elección de los instrumentos de evaluación adecuados a la hora de diseñar el programa de evaluación de un curso, constituye una de las decisiones más importantes para garantizar el valor didáctico de la evaluación en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje. [26].

Propuesta de evaluación

Una vez presentado el marco teórico se desarrolla la propuesta de Evaluación para validar si se logró el objetivo planteado que a través de una secuencia didáctica el alumno logre comprender el concepto derivada de una función en un punto, desde el marco de la teoría APOE y utilizando como herramienta de visualización el software dinámico GeoGebra.

Los criterios de Evaluación propuestos por la Catedra están redactados en forma genérica para todos los contenidos de la Asignatura, se pueden precisar para el concepto de derivada de una función que es objeto de este trabajo.

- Utilizar adecuadamente los conceptos fundamentales del Cálculo diferencial e integral.
- Resolver modelos matemáticos aplicando los conceptos del cálculo diferencial e integral.
- Aplicar el cálculo diferencial e integral para el estudio de innumerables fenómenos científicos y tecnológicos en el campo de la ingeniería.
- Utilizar programas específicos para resolver problemas de aplicación relacionados al campo disciplinar.

Los tipos de evaluación utilizados son la evaluación diagnóstica, formativa y final: Para la evaluación inicial se desarrollara un examen preliminar o de diagnóstico durante el desarrollo de los talleres, para obtener información sobre los conocimientos generales y específicos de los estudiantes en relación a los contenidos que se van a desarrollar.

Para la evaluación formativa se emplearán exámenes escritos y trabajos prácticos. La cual tiene el propósito fundamental de determinar en qué nivel se ha logrado el aprendizaje en cada una de las unidades del programa. Es fundamental para perfeccionar la enseñanza de acuerdo a los

resultados parciales que se vayan obteniendo. Informar sobre el accionar pedagógico y el desarrollo integral de cada estudiante, permite revisar los distintos factores que interactúan e intervienen en el proceso de aprendizaje, las decisiones que se toman después de su aplicación. Como evaluación formativa se desarrollarán:

- Cuatro parciales escritos que comprenden ejercicios prácticos de desarrollo y resolución de problemas de aplicación. El concepto de derivada de una función será evaluado en el segundo Parcial correspondiente al primer cuatrimestre del dictado de la materia.
- Resolución de situaciones problemáticas acordes a la especialidad de la ingeniería que cursan.
- Presentación grupal (trabajo colaborativo) de una propuesta creativa sobre un tema específico, con aplicaciones a la ingeniería.
- Utilización de un software específico (Geogebra) para el desarrollo de los trabajos prácticos y la presentación grupal de la propuesta mencionada.

Para la **evaluación final**, la modalidad del examen será escrita y oral. La cual permite estimar los logros alcanzados al final de un período sobre las competencias y habilidades adquiridas. Es una evaluación para la acreditación de la asignatura y proporciona información significativa.

La elección de los instrumentos de evaluación adecuados a la hora de diseñar el programa de evaluación, constituye una de las decisiones más importantes para garantizar el valor didáctico de la evaluación en relación con los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Los instrumentos de Evaluación seleccionados son los siguientes:

La evaluación diagnóstica se desarrollará a través de diferentes situaciones problemáticas.

En la evaluación formativa se utilizarán pruebas escritas de ejercicios de desarrollo y situaciones problemáticas.

La evaluación final será un examen escrito y oral. [22, p.173] afirma:

Resulta un buen instrumento si la interrogación ayuda a que el alumno evaluado pueda ir elaborando un discurso en el que las relaciones conceptuales se vayan encadenando naturalmente a partir del desarrollo de las ideas eje de una unidad curricular y las ideas globales vayan hilvanando la inclusión de los conceptos particulares. Existen diferentes posibilidades de acuerdo a quien evalúa: se puede pensar en que el alumno comience su exposición habiendo elegido un tema

que a medida que lo presenta, va vinculando con los contenidos de la unidad curricular; se puede pensar en que el alumno comience su exposición a partir de la presentación de una elaboración personal previamente preparada.

Autoevaluación

Para la autoevaluación se confeccionaron cuestionarios con preguntas de múltiple opción utilizando el aula virtual, para que el alumno realice de manera autónoma y continua ejercicios de valoración de su aprendizaje, y sea posible identificar los aspectos que debe mejorar. Esta instancia de evaluación es muy útil como un proceso de retroalimentación tanto para el alumno como para el docente, ya que en base a los resultados obtenidos se puede ver el avance de los alumnos en la comprensión de los conceptos, en este caso el concepto de derivada de una función en un punto.

La plataforma tiene la característica de brindar al alumno los resultados de su autoevaluación y al docente estadísticas generales y particulares de las producciones de los alumnos, esta información puede ser utilizada por el docente para retroalimentar el proceso.

Se muestra a continuación un cuestionario de Autoevaluación con algunas preguntas correspondientes a la Unidad N° 5 sobre el concepto de derivada de una función en un punto.

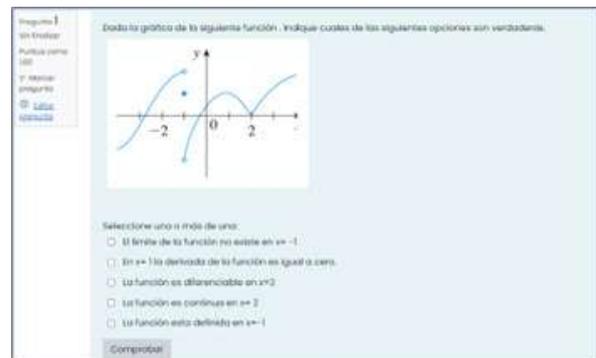


Figura 11. Captura de pantalla - Pregunta N° 1.



Figura 12. Captura de pantalla - Pregunta N° 2.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se logró cumplir con los objetivos específicos planteados, al inicio de esta propuesta.

Respecto al primer objetivo específico, se presentó en el marco de la teoría que sustenta este trabajo una descomposición genética del concepto en estudio, que sugiere que hay dos trayectorias que se relacionan entre sí, Gráfica y analítica, a partir de las cuales se construye el concepto de derivada en el marco de la teoría APOE. La descomposición genética es una hipótesis de cómo el estudiante interioriza el concepto, por lo que de ella se deriva la propuesta didáctica y las actividades utilizando software GeoGebra.

Respecto al segundo objetivo específico, se diseñaron aplicativos matemáticos (Applets) que permiten la visualización del concepto derivada de una función en un punto, coordinando los registros gráfico y analítico del concepto en estudio de acuerdo a la descomposición genética propuesta. En el primer aplicativo se visualiza la derivada de una función en un punto y el segundo estudia el concepto de la función derivada.

El tercer objetivo consistió en el diseño de actividades que permitan aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, especialmente de la física, ciencia fuertemente vinculada a la formación de ingenieros. En ese sentido se pueden plantear problemas de cinemática, utilizando funciones del tipo $x = f(t)$ siendo x la posición de un móvil respecto a un sistema de referencia y t el tiempo que emplea para alcanzar dicha posición. Finalmente se elaboró una secuencia didáctica del concepto de derivada de una función en un punto fundamentada en la descomposición genética propuesta de acuerdo al marco teórico de referencia.

En relación a los objetivos específicos antes mencionados se puede afirmar que se logró cumplir con el objetivo general en el cual se plantea una propuesta didáctica innovadora en el proceso de aprendizaje del concepto derivada de una función en un punto utilizando como herramienta de apoyo el software dinámico GeoGebra fundamentado en la teoría APOE.

Con esta propuesta didáctica se espera superar las dificultades que presentan los alumnos de primer año de las carreras de Ingenierías relacionadas con la comprensión del concepto de derivada de una función en un punto las cuales fueron mencionados en capítulos anteriores. El uso del software dinámico Geogebra permite al alumno la

coordinación del camino gráfico y algebraico, que a través de sus vistas geométricas y algebraicas por su carácter de software dinámico aporta visualmente mayor cantidad de elementos que la observación de imágenes estáticas.

Una propuesta para la continuación del trabajo presentado se basaría en analizar los diferentes niveles de comprensión del concepto de derivada usando el software dinámico Geogebra en el marco de la Teoría APOE. Esta investigación futura permitiría validar la descomposición genética propuesta o realizar las modificaciones que surjan de futuras investigaciones, debido a que la descomposición genética no es estática sino dinámica, la cual se puede modificar o mejorar de acuerdo a cada cohorte de alumnos y sus niveles de comprensión.

REFERENCIAS

- [1]Urquieta, M., Yañez, J. C., y Andrade, J. S. (2014). Análisis según el modelo cognitivo APOS* del aprendizaje construido del concepto de la derivada. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 403-42
- [2]Amaya, C. S., Rojas, H. D., y Ballen, M. B. (2009). Descripción de niveles de comprensión del concepto derivada. *Tecné Episteme y Didaxis: TED*, (26).
- [3]Berry, J. S., & Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), 479-495.
- [4]López Zamudio, A. (2008). Propuesta para la enseñanza del concepto de derivada, un acercamiento visual con Geogebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*.
- [5]Córdoba, Y. Ruiz, K. Y., y Rendón, C. E. (2015). *La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra como propuesta didáctica*. RECME, 1(1), 125-130
- [6]Dubinsky, E., y McDonald, M. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. *New ICMI Study Series*. 1991.
- [7]Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E. D., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*.
- [8]Pereyra, N. E., & Herrera, C. G. (2020). *Dificultades en la comprensión del concepto derivada de una función*. Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 15(2), 48-

58.

- [9]Badillo, E., y Azcárate, C. (2002). Conocimiento profesional de profesores de Matemática de secundaria. Las relaciones entre Derivada y Velocidad en la enseñanza del Cálculo Diferencial. *Primeres Jornades d' Educació Matemàtica de Catalunya*, Mataró Barcelona.
- [10]Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 275-282). Dordrecht: Springer Netherlands.
- [11]Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399-431.
- [12]Sánchez-Matamoros, G., Mercedes, G., & Llinares, S. (2013). Algunos indicadores del desarrollo del esquema de derivada de una función. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 27(45), 281-302.
- [13]Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación matemática*, 17(1).
- [14]Badillo, E., y Azcárate, C. (2002). Conocimiento profesional de profesores de Matemática de secundaria. Las relaciones entre Derivada y Velocidad en la enseñanza del Cálculo Diferencial. *Primeres Jornades d' Educació Matemàtica de Catalunya*, Mataró Barcelona.
- [15]Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia*. Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona-España
- [16]Giménez, C. A., & Machin, M. C. (2003). Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. Edición Especial: *Educación Matemática*, 135.
- [17]Hohenwarter, M., Preiner, J., y Yi, T. (2007). Incorporating GeoGebra into teaching mathematics at the college level. In *Proceedings of the International Conference for Technology in Collegiate Mathematics*.
- [18]Londoño, N., Mederos, O., y Decena, V. G. (2018). GeoGebra como herramienta tecnológica para entender las derivadas y sus aplicaciones. *Revista Electrónica Amiutem*. 2(2), 90-98.
- [19]Córdoba, Y. Ruiz, K. Y., y Rendón, C. E. (2015). *La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra como propuesta didáctica*. RECME, 1(1), 125-130
- [20]Diković, L. (2009). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems*, 6(2), 191-203.
- [21]Gutiérrez, L., y Valdivé, C. (2012). Una descomposición genética del concepto derivada. *Gestión y Gerencia*, 6(3), 104-122.
- [22]Allal, L. (1980). Estrategias de evaluación formativa: concepciones psicopedagógicas y modalidades de aplicación. *Infancia y aprendizaje*, 3(11), 4-22.
- [23]Litwin, E. (1998). La evaluación: campo de controversias y paradojas o un nuevo lugar para la buena enseñanza. *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo*, 11-34.
- [24]Steiman, J. (2018). *Más didáctica (en la educación superior)* (Vol. 3). Miño y Dávila..
- [25]Casanova, M. A. (2007): Manual de Evaluación Educativa. 9ª ed. Madrid, España, Editorial la Muralla, S. A.
- [26]De Camilloni, A., Celman, S., Litwin, E., & Palou de Maté, M. D. C. (1998). *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo* (pp. 176-176). Buenos Aires: Paidós.