

EVALUACIÓN DEL DESARROLLO DE PROCEDIMIENTOS GENERALES MATEMÁTICOS EN ALUMNOS DE LAS CÁTEDRAS ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA DE PRIMER AÑO DE INGENIERÍA

María Inés Cisterna Fernández^{1}, Carlos Gabriel Herrera^{2*}*

¹ *Profesora Adjunto en Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas – Universidad Nacional de Catamarca.*

Profesora en Matemática por la Universidad Nacional de Catamarca. Especialista en Enseñanza de las Ciencias Exactas por la Universidad Nacional de Santiago del Estero.

Diplomada en Enseñanza de la Matemática mediada por Tics por Universidad Católica de Santiago del Estero. Diplomada en Docencia en Entorno Digitales por Universidad Champagnat.

² *Ingeniero Civil. Magister en Docencia Universitaria de Disciplinas Tecnológicas. Profesor Titular Cátedra Álgebra del Departamento de Formación Básica de Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca.*

** Facultad de tecnología y ciencias aplicadas. universidad nacional de catamarca.*

EVALUATION OF THE DEVELOPMENT OF GENERAL MATHEMATICAL PROCEDURES IN STUDENTS OF THE ALGEBRA AND ANALYTICAL GEOMETRY COURSES IN THE FIRST YEAR OF ENGINEERING

RESUMEN: En la currícula de la formación del ingeniero intervienen diversos contenidos matemáticos, entre ellos figuran los que corresponden al Álgebra Lineal Y Geometría Analítica, los que se imparten en el primer año de las carreras de ingeniería. Para que la formación matemática adquirida sea sólida, generalizada y eficiente se deben desarrollar determinadas habilidades o procedimientos generales matemáticos que se traduce en un mejor rendimiento académico de los alumnos. En función de ello el objetivo del trabajo es evaluar la adquisición de las habilidades de Identificar, Interpretar, Graficar y Demostrar en alumnos que cursan el primer año de carreras de Ingeniería. La investigación es de carácter descriptivo y se trabajó con una muestra de alumnos que cursan las asignaturas Álgebra y Geometría Analítica del primer año de Ingeniería de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca. Los instrumentos de recolección de datos fueron diseñados para evaluar las habilidades o procedimientos generales matemáticos y sus resultados principales indican que las mayores dificultades se les presentan a los alumnos en establecer relaciones entre objetos matemáticos del álgebra lineal y su representación geométrica especialmente en el tema base de un espacio vectorial.

Palabras claves: Habilidades Matemáticas, Álgebra Lineal, Geometría Analítica.

ABSTRACT: In the curriculum for engineering education, various mathematical contents are involved, including those corresponding to Linear Algebra and Analytical Geometry, which are taught in the first year of engineering programs. To ensure that the acquired mathematical training is solid, generalized, and efficient, certain skills or general mathematical procedures must be developed, leading to better academic performance among students. Accordingly, the objective of this work is to evaluate the acquisition of skills in Identifying, Interpreting, Graphing, and Demonstrating among first-year engineering students. The research is descriptive in nature and involved a sample of students enrolled in the Algebra and Analytical Geometry courses in the first year of Engineering at the Faculty of Technology and Applied Sciences of the National University of Catamarca. The data collection instruments were designed to assess the skills or general mathematical procedures, and the main results indicate that students face the greatest difficulties in establishing relationships between mathematical objects of linear algebra and their geometric representation, especially in the foundational topic of a vector space.

Keywords: Mathematical Skills, Linear Algebra, Analytical Geometry.

INTRODUCCIÓN

Las diversas investigaciones sobre la adquisición de conceptos de álgebra lineal y geometría analítica han identificado una gama de dificultades en su enseñanza y aprendizaje, principalmente debido al carácter abstracto de algunos contenidos de estas ramas de la matemática o a la complejidad que representa para los estudiantes la articulación de los conceptos involucrados.

Las dificultades que enfrentan los estudiantes en su aprendizaje se asocian generalmente con una incorrecta apropiación de los conceptos, lo que en ocasiones les impide responder adecuadamente a preguntas que requieren un dominio básico de estas disciplinas.

El aprendizaje de los contenidos de álgebra lineal y geometría analítica debe comenzar por establecer relaciones adecuadas entre los conceptos conocidos y los nuevos. Si el estudiante logra

construir dichas relaciones, podrá alcanzar una mejor comprensión de los contenidos introducidos en un curso de álgebra lineal y/o geometría analítica. Para que la adquisición de tales contenidos sea general, consistente y eficiente, es necesario desarrollar determinadas habilidades o procedimientos matemáticos, como interpretar, identificar, demostrar y graficar, entre otros, como se menciona en [1]. Este trabajo se fundamenta en la adquisición de estos procedimientos generales matemáticos, ya que constituyen una labor importante en la formación de los estudiantes de ingeniería.

El trabajo está organizado en seis capítulos que se describen a continuación.

Capítulo 1: Problemática. Objetivos de Investigación. Antecedentes

Aquí se presenta un panorama general de los trabajos que se han desarrollado sobre el aprendizaje y la enseñanza de conceptos del álgebra lineal y su vinculación con conceptos de geometría analítica, observándose una multiplicidad de factores que fundamentan él porque resulta complejo tal articulación a los estudiantes.

Teniendo en cuenta las dificultades que se le presentan a los alumnos de Ingeniería de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca y de antecedentes de investigaciones en didáctica de la matemática, especialmente de contenidos de Álgebra Lineal, se plantearon los objetivos de la investigación basados en el estudio de los procesos de adquisición de las habilidades matemáticas durante el aprendizaje de contenidos de estas áreas y el diseño de estrategias didácticas orientadas a favorecer los procesos de adquisición de tales habilidades.

Capítulo 2: Fundamentación Teórica.

En este capítulo, y en base a los antecedentes tratados, se toma como referencia el Sistema Básico de Habilidades Matemáticas el que definen en [1] bajo la premisa “no se puede separar el saber, del saber hacer, porque siempre saber es saber hacer algo, no puede haber un conocimiento sin una habilidad, sin un saber hacer”. Además se citan trabajos sobre el análisis cognitivo de los temas Espacios Vectoriales y Base de Espacios Vectoriales que fueron ejes centrales de esta investigación. Se realizó además un análisis de los contenidos matemáticos de las carreras de

ingeniería, así como también los de contenidos de los niveles previos al universitario.

Capítulo 3: Metodología.

Este capítulo representa una parte fundamental de esta investigación, aquí definimos el Tipo de Investigación: Descriptiva, pues con la utilización de una determinada estrategia (instrumento ideado con situaciones problemáticas) se buscó representar o describir una situación, y a partir de la información obtenida posibilitar algunas respuestas a los interrogantes planteados. La variable de estudio fue el grado de desarrollo de habilidades o procedimientos matemáticos y temporalmente, es un diseño longitudinal pues el propósito es observar su dinámica a través del tiempo. La recolección de información se realizó en diversas fechas considerándose para su estudio el primer cuatrimestre del primer año de las carreras correspondientes a la cohorte 2013 de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca, con una muestra de 66 alumnos que cumplieron con el 80 % de asistencia a clases y trabajos prácticos, excluyéndose de la misma a alumnos re inscriptos y aquellos que cursaron carreras de nivel superior relacionadas con la matemática.

Capítulo 4: Análisis de Resultados.

En este capítulo se presentan los resultados tanto cuantitativos como cualitativos obtenidos a través del Instrumento diseñado para la Evaluación de los Procedimientos Generales Matemáticos, se determinan categorías de respuestas en grupos según la aplicación de los diferentes procedimientos.

Capítulo 5: Conclusiones.

En este capítulo se muestran las conclusiones, resultado del análisis de los datos proporcionados por el Instrumento Evaluador. Se realizan propuestas de estrategias didácticas tendientes a lograr subsanar dificultades en la adquisición de las habilidades o procedimientos matemáticos evaluados y también se plantean interrogantes de futuras investigaciones.

CAPÍTULO I: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Problema de investigación

Es posible considerar a la matemática,

conjuntamente con la física, como las ciencias esenciales en las carreras de ingeniería, ya que las herramientas proporcionadas por estas disciplinas permiten a los profesionales resolver diversas situaciones problemáticas y utilizar modelos para representar tanto fenómenos naturales como no naturales. Así, el plan de estudios de las carreras de Ingeniería incorpora conocimientos de diversas ramas de la matemática, como álgebra lineal, geometría, cálculo, probabilidad y estadística, impartidos en los primeros años del programa. Estas materias ayudan a desarrollar en los alumnos una capacidad de pensamiento lógico y riguroso, proporcionando las herramientas básicas necesarias para formular un modelo matemático que describa de manera precisa o con la adecuada aproximación y simplicidad un problema real y su solución. Estas habilidades constituyen la base sobre la cual se desarrollan las materias específicas de cada especialidad.

El cálculo matemático, que se originó en el siglo XVIII gracias a las aportaciones de Newton y Leibniz, fue inicialmente concebido para abordar problemas relacionados con el movimiento de los cuerpos. Sin embargo, sus principios pronto se aplicaron a la variación de cantidades en diversas áreas, incluyendo las ciencias exactas, naturales y la economía. Temas tales como el análisis de funciones de una o varias variables, sus tasas y períodos de crecimiento o decrecimiento, así como el cálculo de áreas y volúmenes de figuras complejas, son el foco de estudio del cálculo matemático.

La estadística se ocupa de la recopilación, análisis y aplicación de datos para tomar decisiones y resolver problemas. Es de particular relevancia en los campos de la ingeniería y la ciencia, dado que estos profesionales manejan y analizan datos de forma regular [2]. En álgebra lineal, se estudian conceptos como vectores en el plano y en el espacio, sistemas de ecuaciones lineales, matrices, espacios vectoriales, transformaciones lineales y determinantes. Por su parte, la geometría analítica es la rama de la matemática que explora las propiedades y relaciones de entidades como puntos, rectas y planos en los espacios bidimensional y tridimensional, tanto gráficamente como analíticamente.

Para que la adquisición de estos contenidos sea general, consistente y eficiente para los profesionales, es fundamental enfocar los esfuerzos hacia la formación de procedimientos generales del quehacer matemático, en lugar de centrarse únicamente en muchos procedimientos

específicos sin resaltar ni sistematizar los modos de actuación del estudiante, como se ha expresado en [3]. El desarrollo de estas habilidades es esencial en la formación de los estudiantes de ingeniería, ya que se enfatiza en los objetivos educativos generales promovidos por el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de la República Argentina (CONFEDI). Este afirma que, en la actualidad, es una tendencia internacional en el diseño de planes de estudio de ingeniería el uso de las competencias como horizonte formativo... existiendo consenso en que el ingeniero no solo debe saber, sino saber hacer. Esto último no surge de la mera adquisición de conocimientos, sino que es el resultado de la puesta en funciones de una compleja estructura de conocimientos, habilidades y destrezas, que debe ser reconocida en el proceso de aprendizaje para que la propuesta pedagógica incluya actividades que permitan su desarrollo [4].

En los cursos de álgebra lineal y geometría analítica de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca, se observa que un porcentaje significativo de estudiantes no finaliza estas asignaturas. Además, entre quienes las completan, el porcentaje de alumnos regulares es bajo en relación a la matrícula de ingresantes. Investigaciones han identificado dificultades en la comprensión de temas específicos. Por ejemplo, en estudios sobre la interpretación de conceptos como secciones cónicas, se ha detectado que los estudiantes enfrentan retos especialmente al establecer una ecuación canónica a partir de los elementos de una curva, particularmente cuando estos no se presentan de manera explícita. Además, se han identificado dificultades en la aplicación de conceptos previamente adquiridos a nuevas situaciones [5]. Similarmente, en el ámbito del álgebra lineal, al abordar sistemas de ecuaciones lineales, también se han observado dificultades [6]. En relación con el tema de espacios vectoriales y subespacios, los estudiantes no parecen tener mayores inconvenientes en la identificación de espacios vectoriales ni en su interpretación geométrica en los espacios R^2 o R^3 , aunque tienden a utilizar más el lenguaje algebraico y los algoritmos matemáticos, encontrando mayor dificultad en la interpretación de los conceptos [7].

1.2 Antecedentes de la investigación

Existen diversos estudios sobre las dificultades que enfrentan los alumnos para construir los conceptos fundamentales del álgebra lineal y

la geometría analítica. Desde la perspectiva de la enseñanza del álgebra lineal, se reconoce que es un proceso complejo, independientemente del enfoque utilizado (axiomático, matricial, geométrico o computacional) debido a las dificultades conceptuales y al tipo de pensamiento requerido para su comprensión. Los investigadores han abordado estas dificultades en sus trabajos, llegando a diversas conclusiones. Por ejemplo, se ha señalado que existe una escasa o nula relación entre los contenidos del álgebra lineal y los conocimientos previos adquiridos por los alumnos en cursos anteriores a la universidad [8].

Desde la perspectiva de la representación de un objeto del álgebra lineal, se observa que puede realizarse a través de diferentes lenguajes: el lenguaje geométrico en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, el lenguaje algebraico en $\mathbb{R}^n$ y el lenguaje abstracto [9]. Existen tres tipos de lenguajes que fomentan diferentes formas de pensar: el pensamiento sintético geométrico, el aritmético-analítico, y el analítico-estructural [10].

El lenguaje geométrico se utiliza para ilustrar las representaciones y propiedades de los vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. El lenguaje aritmético se emplea para describir operaciones entre matrices y sistemas de ecuaciones, mientras que el lenguaje algebraico se usa para formalizar y simbolizar objetos matemáticos como espacios vectoriales y transformaciones lineales [10].

El pensamiento sintético geométrico se produce al considerar las disposiciones de rectas y planos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, que representan las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. El pensamiento aritmético-analítico ocurre al estudiar las soluciones a partir de la matriz reducida del sistema de ecuaciones, y el pensamiento analítico-estructural se manifiesta al reflexionar sobre las propiedades de las matrices invertibles o no invertibles.

Algunas de las dificultades en el aprendizaje de los conceptos de álgebra lineal derivan de la falta de articulación entre los diferentes lenguajes utilizados. Por ejemplo, un estudiante podría entender un problema solo desde el enfoque geométrico, sin ser capaz de traducir ese conocimiento al lenguaje algebraico para resolverlo. Asimismo, se menciona el concepto de “obstáculos del formalismo”, donde los alumnos manipulan representaciones de manera mecánica, sin comprender su significado ni las relaciones entre ellas [10].

Otras dificultades señaladas por [11] son la variedad de lenguajes y representaciones que se emplean en el estudio de los objetos del álgebra lineal y la

falta de articulación entre estas representaciones. [10] también enfatiza que un estudiante podría comprender un concepto solamente desde el ángulo geométrico, sin que ello implique que pueda trasladar ese entendimiento al contexto algebraico.

Adicionalmente, [12] y [13] discuten el “obstáculo del formalismo”, concluyendo que los estudiantes tienden a manipular representaciones sin aprehender su significado o las relaciones subyacentes entre ellas. En este sentido, se argumenta que la comprensión del espacio vectorial requerirá, además del dominio de definiciones y técnicas específicas, la comprensión de propiedades y teoremas que guían la evolución de la teoría matemática en álgebra lineal, al tiempo que se mantenga un equilibrio entre el desarrollo conceptual y el tratamiento algorítmico.

En el proyecto de investigación titulado “Incidencia de un Sistema Didáctico Integrador en la Calidad de Asimilación de Contenidos de Álgebra y Geometría Analítica”, llevado a cabo en la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca, se trabajó en la integración de conceptos de álgebra lineal con geometría analítica. Los resultados obtenidos corroboraron las dificultades que los alumnos presentan al justificar sus respuestas a problemas prácticos en álgebra lineal [14]. Además, se observó que, aunque los estudiantes no tenían problemas para identificar un objeto matemático de álgebra lineal, sí enfrentaban dificultades al relacionar los conceptos de esta rama de la matemática con otras ciencias [15].

1.3 Objetivos de la investigación

En virtud de lo expresado, el objetivo principal de este trabajo es estudiar los procesos de adquisición de las habilidades matemáticas durante el aprendizaje de contenidos de álgebra lineal y geometría analítica, por parte de los alumnos de 1º año de Ingeniería de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca.

Así, teniendo como premisa este enfoque, se plantea el trabajo a partir del Sistema Básico de Habilidades Matemáticas que se define en [1] y que tiene como integrantes, las habilidades de Identificar, Interpretar, Graficar y Demostrar, que son las que por su propia naturaleza establecen el vínculo primario con el sistema de conocimientos. El conocimiento y la habilidad están intrínsecamente relacionados, ya que no se puede

concebir el saber sin la capacidad de aplicarlo. En otras palabras, el verdadero entendimiento implica siempre la habilidad de realizar alguna acción relacionada con ese conocimiento. [16].

Objetivo General

Estudiar los procesos de adquisición de las habilidades matemáticas de interpretar, identificar, graficar y demostrar, durante el aprendizaje de contenidos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica, por parte de los alumnos de 1º año de Ingeniería de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas

Objetivos Específicos

Diseñar estrategias didácticas orientadas a favorecer los procesos de adquisición de las habilidades matemáticas de interpretar, identificar, graficar y demostrar, durante el aprendizaje de contenidos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica, por parte de los alumnos de 1º año de Ingeniería de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca

Evaluar el desarrollo de procedimientos o habilidades matemáticas de identificar, interpretar, graficar y demostrar en alumnos de primer año de carrera de Ingeniería de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca

CAPÍTULO II: FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.1 Procedimientos generales matemáticos

Generalmente, la enseñanza de Álgebra Lineal y Geometría Analítica se imparte como si trataran de dos espacios del conocimiento separados, no relacionados, cuando en realidad debería llevarse a cabo una articulación tanto vertical como horizontal entre los conceptos de ambas ramas de la ciencia. Esta relación, tanto en su contenido temático como en la enseñanza, justifica el planteamiento de un estudio que aborde la problemática, razón por la cual este trabajo adopta como Sistema Básico de Habilidades Matemáticas el que define Herminia Hernández (Hernández, 1989).

Dichas habilidades están fundadas en el principio de que no se puede separar el saber, del saber hacer, porque siempre saber es saber hacer algo, no puede haber un conocimiento sin una habilidad,

sin un saber hacer [18] citada por [3].

Como integrantes de dicho Sistema Básico se encuentran las habilidades DEFINIR y DEMOSTRAR, que son las que por su propia naturaleza establecen el vínculo primario con el sistema de conocimientos, así como

IDENTIFICAR, INTERPRETAR, RECODIFICAR, GRAFICAR, ALGORITMIZAR y CALCULAR mediante las cuales hacemos matemática, es decir resolvemos problemas matemáticos en su acepción amplia [1]. El sistema de estas habilidades fue ampliado posteriormente con la habilidad MODELAR y más recientemente con las habilidades COMPARAR, RESOLVER, APROXIMAR y OPTIMIZAR [3].

Para su determinación se tuvieron en cuenta los siguientes requerimientos:

- Pueden ser considerados propios, aunque no necesariamente exclusivos, del quehacer matemático.
- Deben ser suficientemente generales como para que mantengan su presencia a lo largo de la formación matemática de niños, adolescentes y jóvenes.
- Deben ser imprescindibles para la formación matemática de posgrado en todos aquellos profesionales que hacen un uso destacable de la matemática.

Algunos ejemplos de Habilidades o procedimientos Matemáticos, según [3] son:

- El representar la idea de subespacio en $\mathbb{R}^3$, mediante un plano que pasa por el origen presupone Graficar e Identificar.
- Considerar que si $\ker(f) = 0$ la aplicación lineal es inyectiva y el sistema de ecuaciones $AX = B$ correspondiente, es compatible con solución única, presupone Identificar e Interpretar.

En este trabajo se evalúan las habilidades matemáticas de identificar, interpretar, graficar y demostrar adoptándose las definiciones dadas por [1] quien los caracteriza de la siguiente manera:

INTERPRETAR: es atribuir significado a las expresiones matemáticas de modo que estas adquieran sentido en función del propio objeto matemático o en función del fenómeno o problemática real de que se trate.

Esta habilidad permite adaptar a un marco matemático, el lenguaje de otras disciplinas objeto de estudio, para luego en un proceso reversible, traducirlo de nuevo al lenguaje del usuario.

IDENTIFICAR: es distinguir el objeto de estudio matemático, sobre la base de sus rasgos esenciales. Es determinar si el objeto pertenece a una determinada clase de objetos que presentan

ciertas características distintivas.

Como actúa directamente con las definiciones y teoremas, su ejercitación y sistematización en el proceso de enseñanza y aprendizaje posibilita un dominio adecuado de los conceptos, disminuyendo con ello la comisión de errores en el quehacer matemático.

En general, si se tiene en cuenta la precedencia o sucesión en la ejecución de acciones particulares complejas, la habilidad interpretar presupone primeramente identificar [3].

GRAFICAR: es representar relaciones entre objetos matemáticos, tanto desde el punto de vista geométrico, como de diagramas o tablas y recíprocamente, corregir las relaciones existentes a partir de su representación gráfica.

Permite comunicar información de manera visual, así como representar objetivamente objetos mentales. Su uso es importante en la primera etapa del proceso de asimilación de los conceptos.

DEMOSTRAR: es establecer una sucesión finita de pasos para fundamentar la veracidad de una proposición o su refutación. La formación de este procedimiento está íntimamente relacionada con el grado de conciencia con que se forman las acciones y conocimientos de los estudiantes, es decir justificar y explicar que hizo y porque lo hizo.

Este sistema de procedimientos es susceptible de ser ampliado en tanto no está demostrado aun que se haya agotado la lista de los procedimientos que cumplan las exigencias iniciales.

En la tarea de enseñar matemática aparece como un imperativo el trabajo con los procedimientos generales, pues estos permiten acometer una multitud de problemas de diferente índole. No asumirlos y concebir solo la formación de acciones particulares, conlleva a un conocimiento fraccionado, no generalizado y poco perdurable en el pensamiento del estudiante [3].

2.2 Aspectos cognitivos del concepto de espacio vectorial

Teniendo en cuenta que esta investigación está centrada fundamentalmente en temas de Álgebra Lineal, especialmente los conceptos de Espacio Vectorial y Base de un Espacio Vectorial se hacen necesario indagar aspectos cognitivos de estos conceptos que ya han sido desarrollados por distintas investigaciones. Estas investigaciones han sido recopiladas por distintos autores y se mencionan a continuación aspectos salientes de las mismas:

En [17] se desarrollan aspectos cognitivos del concepto de espacio vectorial. Por un lado, se citan investigaciones de [8] y [12] y se afirma que el discurso matemático escolar del Álgebra Lineal privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de resolución, en desmedro de la comprensión conceptual de nociones básicas [18]. También afirma que, la axiomatización en sí misma del álgebra lineal no permitió solucionar nuevos problemas, sino un acercamiento y un lenguaje más universal utilizable en una variedad de contextos (análisis funcional, formas cuadráticas, aritmética, geometría, etc.). Este acercamiento marcó un nuevo nivel en la abstracción: el concepto de EV, abstracción de objetos ya abstractos – vectores geométricos, n -uplas, polinomios, series, funciones...-. Este cambio de perspectiva induce otro, sofisticado, a nivel de las operaciones mentales. De hecho, uno puede distinguir dos fases en la construcción de ciertos conceptos: unificación (poner juntos varios saberes para crear un todo) y generalización [3]. Varios investigadores franceses plantean la noción del obstáculo del formalismo. Este se manifiesta en los estudiantes que manipulan objetos como vectores, ecuaciones, coordenadas, etc. “sumergiéndose en una avalancha de términos nuevos, de símbolos nuevos, de definiciones nuevas, y de teoremas nuevos” [3, p. 258].

[17] en relación con aspectos cognitivos del concepto de espacio vectorial citan las investigaciones de Harel (1987, 1989a, 1989b, 1990) quién identifica la introducción repentina de los conceptos abstractos del álgebra lineal y su concretización en modelos principalmente algebraicos, como la causa principal de las dificultades que los estudiantes enfrentan en su curso de álgebra lineal. [18] se propusieron estudiar la comprensión del concepto de Espacio Vectorial, desde la perspectiva APOE. Los resultados de esa investigación muestran que los estudiantes no habían encapsulado el proceso de operación binaria y no se habían formado esquemas ricos del concepto de Espacio Vectorial. Además, agregan que los estudiantes, suelen interpretar los axiomas limitándose al cuerpo de los números reales y se corresponden con la imagen visual que tienen de las operaciones con estos números.

En [19] se citan investigaciones relacionadas a aspectos cognitivos del concepto de Base de un espacio vectorial y los elementos que lo componen (Conjunto Generador e Independencia Lineal) citando por ejemplo a Chargoy (2006) quién utiliza como marco de referencia los modos de

pensamiento de [12] y registra las dificultades que tiene un estudiante para entender el concepto de base de un espacio vectorial a partir de un contexto geométrico. En el mismo sentido se citan los trabajos de Da Silva y Lins (2002) quienes enfocan en el análisis de las producciones de significados para la noción de base en álgebra lineal y utiliza como sustento el marco teórico de los campos semánticos, en el que se pretende caracterizar la existencia de un significado producido en una actividad dada, es decir, se distingue lo que una persona puede decir y lo que realmente dice de un objeto en una actividad dada.

Por último, en [19] también mencionan las investigaciones de Nardi (1997) que estudia las dificultades conceptuales y de razonamiento del matemático principiante (estudiantes de matemáticas de primer año), en su encuentro con la abstracción matemática y aborda, como parte de su proyecto, los conceptos de espacio generado y conjunto generador en álgebra lineal.

2.3 Conocimientos previos

Las asignaturas Álgebra y Geometría Analítica se encuentran en el primer año del plan de estudios de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca, razón por la cual se hace necesario analizar los conocimientos previos que los alumnos deberían haber tenido de los niveles de educación previos al universitario y también la estructura curricular del primer año de las carreras de Ingeniería, incluyendo la carga horaria para cada asignatura. En función de ello se describen en el presente capítulo los contenidos matemáticos de los niveles de educación secundario de la Provincia de Catamarca que nos servirán de base para el desarrollo del trabajo, como así también los contenidos matemáticos de las diferentes carreras de Ingeniería.

Primeramente se hace una breve descripción de los contenidos matemáticos correspondientes al nivel de Educación Secundaria (Ley de Educación Provincial N° 5381 - Decreto N° 2269/13); y además como los alumnos que cursan las carreras de ingeniería provienen de colegios secundarios con modalidades residuales de la Educación Polimodal (Ley Federal de Educación N° 24.195), que en el caso de la Provincia de Catamarca dejaron de egresar a partir del año 2012, también se hace mención a los contenidos matemáticos correspondientes a este nivel de educación media, con excepción de las escuelas que dependen

de la Universidad Nacional de Catamarca, la Escuela Pre-Universitaria “Fray Mamerto Esquiú” y la ENET N° 1 quienes se mantuvieran secundarizadas.

Es conveniente tener presente que el Sistema Educativo se encuentra en una etapa de transición desde el año 2013, y que dicha transformación no es inmediata, sino que se realiza por etapas, produciéndose por lo tanto la convivencia de las nuevas estructuras con las residuales.

En la Educación Polimodal, cuyos primeros egresados en Catamarca, corresponden al año 2001, los contenidos comunes de Matemática estaban establecidos por bloques, Bloque 1: Números y funciones.

- Bloque 2: Álgebra y geometría.
- Bloque 3: Estadística y probabilidad.
- Bloque 4: Contenidos procedimentales del quehacer matemático.
- Bloque 5: Contenidos actitudinales.

Siendo el Bloque N° 2: Álgebra y Geometría, el de mayor interés para el presente trabajo.

Los contenidos de este bloque se presentan como:

- Ecuaciones e inequaciones. Formas de resolución de ecuaciones, inequaciones y sistemas (analítica, gráfica, etc.)
- Funciones polinómicas en una variable. Operaciones. Raíces de una función polinómica.
- Vectores en el plano y en el espacio. Operaciones: suma y producto por un escalar, producto interno (escalar) en el plano, producto interno y vectorial en el espacio.
- Curvas planas. Ecuaciones de la recta y el plano. Cónicas como lugar geométrico y como secciones de un cono de revolución.
- Ecuaciones de la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola. De acuerdo a los diseños curriculares para las distintas modalidades, solamente la modalidad Ciencias Naturales tenía como espacio a la Matemática en su 3° Año.

En el año 2013 se tiene en la Provincia de Catamarca los primeros egresados de la NES (Nueva Escuela Secundaria), que es obligatoria y constituye una unidad pedagógica y organizativa destinada a adolescentes y jóvenes que hayan cumplido con la Educación Primaria. Con una duración de seis (6) años, con excepción de la Educación Técnico Profesional con una duración de siete (7) años.

La NES se divide en dos (2) ciclos: Ciclo Básico, de tres (3) años de duración y de carácter común a todas las orientaciones; y Ciclo Orientado, de tres (3) años diversificado según distintas áreas

del conocimiento, del mundo social y del trabajo. En la modalidad Técnico Profesional se divide en un primer ciclo básico de tres (3) años y un segundo ciclo orientado de cuatro (4) años de duración. Se establece que las modalidades de Ciencias Naturales y Ciencias Exactas son las que contienen en su diseño curricular mayor cantidad de horas de clase de Matemática y los diseños curriculares de las escuelas técnicas tienen una base de contenidos en Matemática superiores a las otras modalidades, y mayor carga horaria de la asignatura.

2.4 Contenidos matemáticos para carreras de ingeniería

La resolución: Resolución 1232/01 del Ministerio de Educación de la Nación, con fecha 20 de diciembre de 2001 reza:

El objetivo de los estudios en Matemática es contribuir a la formación lógico-deductiva del estudiante, proporcionar una herramienta heurística y un lenguaje que permita modelar los fenómenos de la naturaleza. Estos estudios estarán orientados al énfasis de los conceptos y principios matemáticos más que a los aspectos operativos. Deben incluir Álgebra Lineal, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial e Integral en una y dos variables, Ecuaciones Diferenciales, Probabilidad y Estadística, además de temas de Análisis Numérico y Cálculo Avanzado.

El plan de estudios debe cubrir aspectos formativos relacionados con las ciencias sociales, humanísticas y todo otro conocimiento que se considere indispensable para la formación integral del ingeniero.

Se observa que en los contenidos de Matemática para las Carreras de Ingeniería si bien difieren de acuerdo a la Especialidad, también existen contenidos que son comunes a todas ellas.

La resolución 1232/01 establece en su ANEXO I que:

Las ciencias básicas abarcan los conocimientos comunes a todas las carreras de ingeniería, asegurando una sólida formación conceptual para el sustento de las disciplinas específicas y la evolución permanente de sus contenidos en función de los avances científicos y tecnológicos. La definición de los contenidos curriculares básicos -que las carreras deberán cubrir obligatoriamente por ser considerados esenciales para que el título sea reconocido con vistas a la validez nacional- constituye una matriz básica y sintética de la que se pueden derivar lineamientos curriculares y

planes de estudio diversos.

Los contenidos alcanzan no sólo la información conceptual y teórica considerada imprescindible, sino las competencias que se desean formar, dejándose espacio para que cada institución elabore el perfil del profesional deseado.

En las carreras de Ingeniería se considerarán 4 grupos básicos de materias:

Ciencias Básicas (Matemática, Física, Química, Sistemas de Representación), Tecnologías Básicas, Tecnologías Aplicadas, Complementarias. En el ANEXO II de la Resolución 1232/01 se constituye la Carga Horaria Mínima con las siguientes especificaciones:

La carga horaria mínima total del plan de estudio será de 3750 horas, recomendándose su desarrollo a lo largo de cinco años.

Recomendación indicativa:

Cada bloque debe tener como mínimo las horas totales de teoría, práctico y laboratorio correspondiente al 55% de la carga horaria homogeneizada según la siguiente tabla:

Tabla I	
Distribución de Horas en Grupos y Disciplinas de Ciencias Básicas	
GRUPO	HORAS
Ciencias Básicas	750
Tecnologías Básicas	575
Tecnologías aplicadas	575
Complementarias	175
TOTAL	2075
Tabla II	
Distribución de las 750 horas mínimas de Ciencias Básicas en disciplinas	
DISCIPLINAS	HORAS
Matemática	400
Física	225
Química	50
Fundamentos de Informática y Fundamentos de Informática	75
TOTAL	750

Estas 750 horas podrán completarse entre las materias específicas y alguna/s otra/s convenientemente integradas, según lo previsto en el punto II.5 del Anexo IV: “Estándares para la Acreditación”

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA

3.1 Tipo y diseño general del estudio

Los estudios descriptivos buscan especificar las

propiedades importantes de personas, grupos o cualquier otro fenómeno que sea sometido a análisis. Desde el punto de vista científico, describir es medir, esto es, en un estudio descriptivo se selecciona una serie de cuestiones y se mide cada una de ellas independientemente, para así describir lo que se investiga. [20].

En función de los objetivos de la investigación, este es un estudio descriptivo ya que se buscó representar o describir una situación o realidad en particular, mediante la utilización de una determinada estrategia, de la que se espera obtener información que permita caracterizar el “fenómeno” que se analiza y posibilite algunas respuestas a los interrogantes planteados. [21] afirma que las investigaciones descriptivas intentan describir las características de un fenómeno a partir de la determinación de variables o categorías ya conocidas. Según el tratamiento de la variable tiempo es un diseño longitudinal ya que plantea el análisis del problema de estudio a lo largo del tiempo, con el propósito de observar su dinámica. La recolección de información se realizará en diversas fechas considerándose para su estudio el primer cuatrimestre del primer año de la carrera correspondiente a la cohorte 2013.

Así la investigación se llevó a cabo con estudiantes de primer año de las Carreras de Ingeniería de la Facultad de Tecnología y Ciencias Aplicadas de la Universidad Nacional de Catamarca. Se trabajó en la cátedra Álgebra con una muestra de 66 alumnos que cumplieron con el 80 % de asistencia a clases y trabajos prácticos, excluyéndose de la misma a alumnos reinscriptos y aquellos que cursaron carreras de nivel superior relacionadas con las matemáticas. La importancia de esta forma de selección se debe al hecho de que interesaba trabajar con alumnos que recién ingresaran al nivel universitario y estuvieran recibiendo conocimientos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica.

3.2 Variables

La variable en estudio es el grado de desarrollo de habilidades o procedimientos matemáticos siendo las categorías de análisis a considerar las de identificar, interpretar, demostrar y graficar definidas [1].

Se desarrolló un instrumento de recolección de datos diseñados a tal fin, basándose en la resolución de situaciones problemáticas correspondientes a los diferentes contenidos matemáticos que se dictan en la carrera.

A continuación, se presentan los indicadores para cada dimensión, esto es la definición operacional. [22] afirma que la definición operacional de una variable significa, antes que nada, contextualizarla, decir como podrán ser constatadas sus variaciones en cierta situación concreta. En efecto, los indicadores se conciben como manifestaciones observables del concepto a medir, y el instrumento ideado para su evaluación.

Tabla 3: Definición Operacional de la Variable Grado de Desarrollo de Habilidades Matemáticas.

DIMENSION	INDICADORES
INTERPRETAR	Atribuye correctamente significado a las expresiones matemáticas.
	Atribuye en forma parcial significado a las expresiones matemáticas No atribuye correctamente significado a las expresiones matemáticas.
IDENTIFICAR	Distingue objetos matemáticos sobre la base de sus rasgos esenciales.
	Distingue parcialmente objetos matemáticos sobre la base de sus rasgos esenciales.
	No distingue objetos matemáticos sobre la base de sus rasgos esenciales.
GRAFICAR	Representa relaciones entre objetos matemáticos.
	Representa parcialmente relaciones entre objetos matemáticos
	No representa relaciones entre objetos matemáticos
DEMOSTRAR	Establece correctamente una sucesión finita de pasos para fundamentar la veracidad de una proposición matemática.
	No establece correctamente una situación finita de pasos para fundamentar la veracidad de una proposición matemática.

3.3 Instrumentos de recolección de datos

Por tanto, en este trabajo se analizan aspectos relativos al aprendizaje de las matemáticas por parte de alumnos de Ingeniería, más precisamente de las asignaturas Álgebra y Geometría, se diseñó un instrumento evaluador basado en establecer relaciones entre los conceptos correspondientes a estas disciplinas tomando como indicadores el desarrollo de los procedimientos generales matemáticos anteriormente definidos. Dicho instrumento estuvo diseñado para que los alumnos resuelvan situaciones prácticas del Álgebra Lineal y constaba de seis ejercicios correspondientes a los temas Sistemas de Ecuaciones Lineales y Espacios Vectoriales, incluyéndose en este último eje temático el concepto de Base de un Espacio Vectorial y los elementos que lo componen (Dependencia Lineal y Conjunto Generador). El mismo constaba de seis ejercicios, o situaciones prácticas, que a continuación se describen:

Ejercicio N°1: Resolver el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Este ejercicio tenía por objetivo indagar en los estudiantes la habilidad o procedimiento matemático de Interpretar un sistema de ecuaciones lineales y su conjunto solución partiendo de la matriz de coeficientes del mismo. Requiere para su resolución la realización de operaciones elementales de filas y la habilidad matemática de Identificar una matriz en su forma escalonada reducida.

Ejercicio N°2: Sea el sistema de ecuaciones homogéneo cuya matriz de coeficientes A es de tamaño 4x6 y su reducida escalonada por filas tiene tres filas no nulas. Indique, justificando sus respuestas, cuál de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa:

- A - El sistema no tiene solución.
- B - El sistema es compatible determinado
- C - El sistema es compatible indeterminado
- D - El número de parámetros de la solución general es igual a 3.

En este segundo ejercicio se trabajó en forma coloquial y se evaluaron las habilidades matemáticas de Interpretar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Se hace necesario para ello Identificar el Sistema de Ecuaciones Lineales Homogéneo a partir del tamaño de su matriz de coeficientes y el número de filas no nulas de su matriz escalonada reducida.

Ejercicio N°3: Indique si el conjunto solución del Sistema de Ecuaciones Lineales siguiente:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Constituye un subespacio de $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, *)$. Justifique su respuesta. Interprete geoméricamente el sistema de ecuaciones y su conjunto solución.

En este ejercicio se hacen presentes los procedimientos generales matemáticos de Interpretar y Graficar, ya que el alumno deberá

representar las relaciones existentes entre los conceptos matemáticos de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos y el espacio vectorial respectivo y explicar su interpretación geométrica correspondiente.

Ejercicio N°4: Indique, justificando sus respuestas, si los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes o linealmente dependientes.

$$A = \{(1, -1, 2); (0, 1, 1)\}$$

$$B = \{(1, 0, 1); (1, 1, 0); (2, 0, 2)\}$$

$$C = \{(1, 0, 1); (1, 1, 0); (0, 1, 1)\}$$

$$D = \{(1, 0, 1); (1, 1, 0); (0, 1, 1); (1, 1, 1)\}$$

$$E = \{(1, 0, 1); (0, 0, 0)\}$$

En este ejercicio el alumno pondrá de manifiesto los procedimientos generales matemáticos de Interpretar y de Demostrar, pues tendrá la posibilidad de fundamentar toda afirmación que se haga en la resolución del mismo, que será el resultado de la asimilación consciente de la acción o concepto correspondiente a la independencia o dependencia lineal. Es necesario identificar el objeto matemático, es decir el concepto de Dependencia Lineal.

Ejercicio N°5: Sea el espacio vectorial $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$.

A- Indique, justificando su respuesta si los vectores del conjunto $A = \{(1, 0, 1); (0, -1, 1); (2, -1, -1)\}$ generan W.

B- Indique si los vectores del conjunto A son Linealmente Independientes o Linealmente Dependientes.

El primer apartado del Ejercicio 5 requiere el procedimiento general matemático de Demostrar que un conjunto de vectores es un Conjunto Generador de un Espacio Vectorial. La segunda parte de la situación planteada requiere de la Habilidad de Interpretar, la Dependencia Lineal de los vectores del conjunto A.

Ejercicio N°6: Sea el espacio vectorial $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$.

A - Indique una base y dimensión de W. Interprete geoméricamente W. B - Es posible generar W con solo dos vectores del conjunto $A = \{(1, 0, -1); (0, -1, 1); (2, -1, -1)\}$. Justifique su respuesta.

En esta situación se evaluaron las habilidades matemáticas de Interpretar, Identificar Y Graficar, sobre la base de los conceptos de Base y Dimensión de un espacio vectorial.

3.4 Análisis de resultados

Se realiza un análisis cuantitativo teniendo en cuenta las respuestas de los alumnos y se establecen

tres categorías de respuestas. Se presentan gráficos de frecuencias de respuestas para cada uno de las seis situaciones planteadas en el instrumento de recolección de datos. Se consideran a este efecto respuestas correctas, y también aquellas que responden parcialmente los ejercicios planteados en el instrumento.

Se realiza un análisis de cada una de las respuestas y justificaciones de los alumnos a las situaciones planteadas en el instrumento de recolección de datos. En el análisis de las respuestas se establecen distintas categorías de manera de obtener un primer acercamiento a las concepciones que los alumnos lograron construir en relación con los conceptos de los temas sistemas de ecuaciones, espacios vectoriales y base de un espacio vectorial. De esa manera se evalúan las diferentes habilidades matemáticas definidas en Capítulo II.

CAPÍTULO IV: RESULTADOS

Análisis cuantitativo

En el Ejercicio N°1 del Instrumento Evaluador; cuyo objetivo fue que el alumno utilice el procedimiento general matemático de Interpretar un sistema de ecuaciones lineales y su conjunto solución partiendo de su matriz de coeficientes y a su vez se analiza la habilidad matemática de Identificar una matriz en su forma escalonada reducida.

Se puede observar que un total de diecinueve alumnos responden correctamente, mientras que once alumnos responden de forma parcialmente correcta. Se presentan diez respuestas incorrectas y veintiséis alumnos no responden. Se muestran en Figura N°1 los resultados de esta situación planteada en el Instrumento.

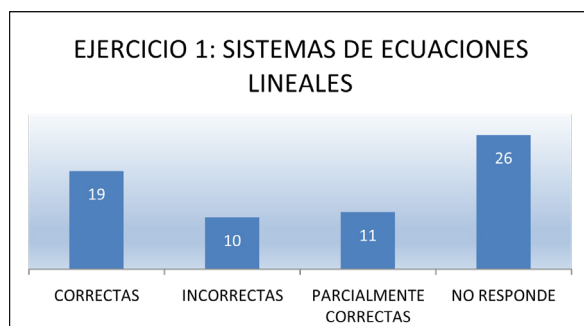


Figura 1: Frecuencias de respuestas de alumnos al Ejercicio 1 del Instrumento Evaluador.
Nota: Tema: sistemas de ecuaciones lineales.

El Ejercicio N°2 del Instrumento tiene por objetivo que el alumno utilice la habilidad matemática de

interpretar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Este ejercicio fue planteado en forma coloquial. De un total de 66 alumnos que forman la muestra solo diecinueve responden correctamente la consigna, veintitrés resuelven parcialmente, quince responden en forma incorrecta y nueve no responden, según se observa en el Figura N°2.

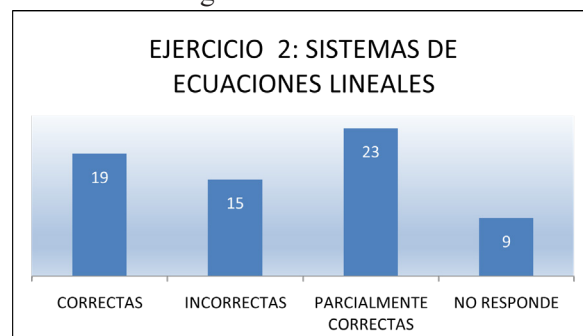


Figura 2: Frecuencias de respuestas de alumnos al ejercicio 2 del Instrumento Evaluador.

Nota: Tema: sistemas de ecuaciones lineales.

En el Ejercicio N°3 donde el alumno tiene que establecer la relación entre la solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo y el concepto de subespacio vectorial, requiriéndose la interpretación de conceptos como subespacios vectoriales e intersección de subespacios vectoriales, se planteó como objetivo que los alumnos utilicen los procedimientos generales matemáticos Identificar, Interpretar y Graficar.

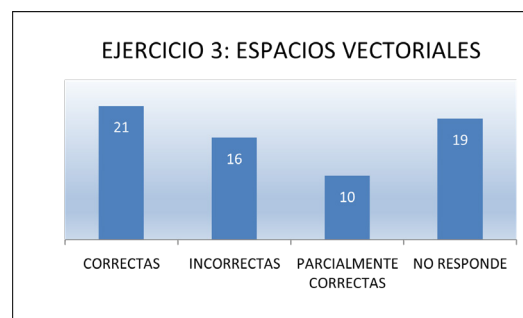


Figura 3: Frecuencias de respuestas de alumnos al Ejercicio 3 del Instrumento Evaluador.

Nota: Tema: Espacios Vectoriales.

Se obtuvieron los siguientes resultados; del total de 66 alumnos de la muestra, veintiuno (21) respondieron correctamente, diez (10) parcialmente bien, dieciséis (16) lo hacen en forma incorrecta y diecinueve (19) no respondieron según se observa en la Figura N°3.

La cuarta situación planteada requería de los discentes las habilidades matemáticas de interpretar y demostrar, a partir de conjuntos de vectores

del espacio vectorial (R^3 , $+$, R , $*$), se requería que indiquen si los mismos eran linealmente independientes o linealmente dependientes, lo que requiere la habilidad matemática de identificar. Las respuestas eran libres, es decir que podían responder a través de una demostración, de teoremas o de condiciones geométricas de los vectores. Los resultados de este ejercicio se presentan en Figura 4, donde se observa que dieciséis alumnos responden correctamente, quince lo hacen parcialmente, quince responden incorrectamente y veinte no responden.

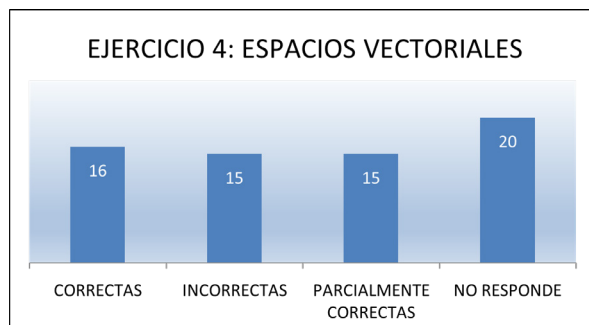


Figura 4: Frecuencias de respuestas de alumnos al ejercicio 4 del Instrumento Evaluador.
Nota: Tema: Espacios Vectoriales.

El Ejercicio N°5, que requería determinar si un conjunto de vectores genera un espacio vectorial determinado y si los mismos eran linealmente independientes o linealmente dependientes, fue diseñado para evaluar los procedimientos generales matemáticos de demostrar e interpretar. De los sesenta y seis alumnos que conforman la muestra, veintidós lo hacen correctamente, cuatro responden parcialmente bien, quince incorrectamente y veinticinco no responden la consigna, como lo muestra el Figura N°5.



Figura 5: Frecuencias de respuestas de alumnos al ejercicio 5 del Instrumento Evaluador.
Nota: Tema: Espacios Vectoriales.

En el ejercicio N°6 del Instrumento Evaluador se puede ver que de los 66 alumnos de la muestra solo veintidós respondieron correctamente, cinco

lo hicieron parcialmente bien, siete lo hicieron incorrectamente y treinta y dos no contestaron la consigna como se puede verse en el Figura N°6.



Figura 6: Frecuencias de respuestas de alumnos al ejercicio 6 del Instrumento Evaluador.
Nota: Tema: Espacios Vectoriales.

En esta situación tenía por objetivo evaluar las habilidades matemáticas de Interpretar, Identificar Y Graficar, sobre la base de los conceptos de Base y Dimensión de un espacio vectorial.

Análisis cualitativo

Ejercicio 1 y 2 – Tema: sistemas de ecuaciones lineales

Debido a la similitud de los Ejercicios N°1 y 2 se analizan las respuestas de los alumnos a ambas situaciones en forma conjunta, observándose lo siguiente:

Cuando utilizan correctamente los teoremas y definiciones respecto al tema sistema de ecuaciones lineales no tienen dificultades en determinar la solución de un sistema de ecuaciones lineales, parametrizando correctamente el conjunto solución e interpretando correctamente la situación planteada. Así por ejemplo el Alumno A23 resuelve el sistema lineal homogéneo a partir de la matriz de coeficientes escalonada reducida:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplica correctamente el Teorema de Rouché – Frobenius y determina la compatibilidad del sistema y calcula el número de parámetros de la solución general.

Con respecto a El Ejercicio N°2, presenta las respuestas a partir del número de filas no nulas de la matriz de coeficientes reducidas y el número de

variables:

“El sistema no puede ser compatible determinado ya que, al ser el número de variables mayor al número de filas no nulas de la matriz, existe al menos un parámetro”, también expresa que “el sistema es indeterminado ya que la solución debe parametrizarse debido a que el número de variables es mayor al número de filas no nulas”

En el mismo sentido el alumno A31 resuelve correctamente el Ejercicio N°1 numéricamente y respecto al Ejercicio N°2 determina el número de parámetros aplicando teoremas:

“Sistema homogéneo $r(A)$ y $r(A/B)$ son iguales, 2 ecuaciones y 3 incógnitas, $r(A/B)$ sería “Como existe por lo menos un parámetro $p = 1$ es un sistema compatible indeterminado”

b) Se presentan casos que el alumno resuelve correctamente el ejercicio planteado en forma matricial (Ejercicio N°1) pero no justifica correctamente sus respuestas cuando el problema se plantea en forma coloquial. Así por ejemplo el Alumno A9, obtiene la solución del sistema expresado en forma matricial, pero cuando se plantea un problema en forma coloquial (Ejercicio N°2) no justifica correctamente la respuesta. Expresa:

“Es compatible indeterminado pues posee infinitas soluciones posibles, según el valor de la 3ra incógnita.”

En el mismo sentido, el alumno A25 resuelve correctamente la situación presentada a través de su matriz de coeficiente parametrizando correctamente el conjunto solución, pero cuando se presenta el problema en forma coloquial plantea un ejemplo numérico que es resuelto correctamente.

El alumno A5 no justifica correctamente la segunda situación planteada: “Es compatible indeterminado porque tiene más incógnitas que ecuaciones y tiene solución infinita” a pesar de haber resuelto correctamente la primera parte del ejercicio.

c) Se presentan también alumnos que a pesar de interpretar correctamente la situación tienen dificultades en la mecánica de parametrización del conjunto solución de un sistema de ecuaciones. Así por ejemplo el alumno A44 respecto a la situación presentada en forma coloquial expresa: “Es compatible indeterminado porque tiene más incógnitas que ecuaciones y el sistema es homogéneo”, pero no parametriza el conjunto solución partiendo de la matriz de coeficientes de un sistema lineal homogéneo.

Ejercicio N°3 – Tema: Subespacios vectoriales

En este ejercicio, por ser las respuestas de carácter libre, es decir que el alumno podía resolverlo libremente aplicando herramientas desarrolladas en la teoría como en las clases prácticas de la asignatura Álgebra se pueden observar diferentes categorías de respuestas:

a) Alumnos que utilizan la demostración de que el conjunto solución del sistema de ecuaciones es subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, *)$. Para poder justificar sus respuestas de esta manera tuvieron que resolver el sistema y parametrizar su conjunto solución. Por ejemplo, los alumnos A4 y A54, interpretaron correctamente el conjunto solución como una recta que pasa por el origen de coordenadas, parametrizaron su ecuación y demostraron a través de las condiciones suficientes que el conjunto solución del sistema es subespacio de $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, *)$.

No logran establecer la relación geométrica de que una recta que pasa por el origen es subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, *)$.

b) Un grupo minoritario de alumnos de la muestra resuelve la situación planteada a partir de Teoremas trabajados en clases teóricas, con correctas justificaciones a sus respuestas y correctas interpretaciones geométricas del sistema y su conjunto solución. Así por ejemplo el alumno A12 afirma: “conjunto solución de un sistema homogéneo si constituye un subespacio de $\mathbb{R}^n$ siendo n es el número de variables.” Este grupo de alumnos interpreta geométricamente el sistema y su conjunto solución.

c) Mayoritariamente la justificación de las respuestas provino de la interpretación geométrica del sistema, de su conjunto solución y de los subespacios de $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, *)$. Así por ejemplo la respuesta del Alumno A3, afirmando “Si es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, son 2 planos que pasan por el origen. El conjunto solución será una recta que pasa por el origen por lo tanto si es subespacio”, pero sin resolver el sistema.

d) Un grupo de alumnos tuvo dificultades en la habilidad matemática de Interpretar el ejercicio planteado. Ello se desprende de que, a pesar de resolver correctamente el sistema de ecuaciones, o interpretarlo geométricamente, no justifican correctamente si el conjunto solución es subespacio de $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, *)$. Por ejemplo, los alumnos A18 y A25 resuelven correctamente el sistema, pero no pueden justificar si el conjunto solución del mismo es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio N°4: Dependencia e independencia lineal

Para la cuarta situación planteada en el Instrumento de Recolección de Datos se observan diferentes categorías de respuestas:

a) Alumnos que resuelven los cinco apartados del ejercicio a través de la utilización de teoremas relativos al tema como por ejemplo el alumno A17 quién utiliza para los dos primeros apartados el concepto de combinación lineal “los vectores son L.D. porque el segundo se lo puede escribir como combinación lineal del primero por un escalar” o “es L.D. porque el primer vector es combinación del primero más el segundo”, en el cuarto apartado expresa “es L.D. porque hay más vectores que la dimensión $n = 4$ $3 n > m$.” y en la quinta situación expresa que “es L.D. porque en el conjunto de vectores está el vector nulo”. Similares respuestas se observan en el alumno A19.

b) Un grupo minoritario de alumnos utiliza para las dos primeras situaciones el contexto geométrico, para los dos finales utiliza teoremas. Así por ejemplo el alumno A14 expresa “Es L.D. por que los vectores son colineales”, para el segundo apartado y expresa para el cuarto y quinto apartado “son linealmente dependientes por qué son más vectores que la dimensión del espacio” o “son LD por que tiene el vector nulo”

c) Un grupo mayoritario de alumnos, que responde correctamente el ejercicio, opta por resolver la mayoría de los apartados a través de cálculos, que son realizados correctamente, excepto los apartados “D” y

“E” que son resueltos utilizando teoremas de mayor número de vectores que la dimensión del espacio y de la presencia del vector nulo en el conjunto.

Ejercicio N°5: Conjunto o sistema de generadores de un espacio vectorial.

Analizando las respuestas obtenidas se puede inferir que los alumnos resuelven el apartado “A” realizando los cálculos numéricos, pues no es de simple visualización que el conjunto de vectores dados genere el espacio vectorial W.

Con respecto al apartado “B”, donde se les solicita si un conjunto de vectores que genera el conjunto W del apartado anterior es linealmente independiente o dependiente, es notable lo predominante del algoritmo de cálculo ante el concepto geométrico. En este caso se pueden categorizar las respuestas de los alumnos en los siguientes grupos:

a) Un grupo mayoritario demuestra correctamente que el conjunto de vectores es Linealmente Dependiente.

b) Alumnos utilizaron la matriz reducida del apartado “A” del ejercicio para analizar la

dependencia o independencia lineal. Como la matriz cuadrada reducida tiene una fila nula los alumnos deducen que los vectores son linealmente dependientes. Alumno A8: “los vectores son LD porque realizando la misma operación, se anula la última fila, como en el apartado anterior”

c) Un grupo minoritario de alumnos responden utilizando un concepto geométrico de dimensión del espacio generado. El alumno A39 expresa “el conjunto será LD porque tres vectores generan un plano”. Solo un alumno A39 resuelve el segundo apartado del ejercicio desde una perspectiva geométrica es decir que si tres vectores generan un plano tienen que ser linealmente dependientes. Se observa que en esta situación particular dificultades en la habilidad matemática de Graficar.

Ejercicio N°6: Base de un espacio vectorial

En este ejercicio, donde se pedía determinar una base del espacio vectorial de W correspondiente al ejercicio anterior y se pregunta si es posible generar al espacio vectorial W con solo dos vectores de un conjunto determinado, se requiere de las habilidades o procedimientos generales matemáticos de Identificar, Interpretar y Graficar. Es notable que la mayoría de los alumnos determinen una base, realizan la interpretación geométrica correspondiente y mediante un ejemplo prueban que es posible generar a W con solo dos vectores del conjunto propuesto.

Algunas de las respuestas salientes de este ejercicio se detallan a continuación.

Alumno A1: “geométricamente es un plano que pasa por el origen y su dimensión es 2” “si es posible generar W con solo dos vectores del conjunto A: (1, 0, -1) y (0, -1, 1)”

Alumno A2: “base de W: (1, 1, -2); (3, 2 -5). W es de dimensión 2 y es un plano que pasa por el origen” “solo dos vectores de A si pueden generar W porque cumplen la condición $n > m$ de sistema generador y cumplen además la condición: $x + y + z = 0$ ”

Alumno A3: “W es un plano que pasa por el origen” “es posible generar W con dos vectores del conjunto A, estos son: (1, 0, 1) y (0, 1, 1) estos no son coplanares, son LI, y pueden generar también una base”

Alumno A4: “base: (1, 0, -1); (0, 1, -1), pues genera (x, y, -x-y) y es LI. Geométricamente son dos vectores que pasan por el origen y por lo tanto un plano que también pasa por el origen”

O sea, que analizando las respuestas correctas al apartado “A” y “B” se observa que no presentan dificultades en interpretar geométricamente a W, aunque presentan contradicciones entre las

respuestas de los Ejercicios 5 y 6, ya que un número importante de alumnos que interpreta geoméricamente a W como “plano que pasa por el origen”, indicando que es un espacio vectorial de dimensión 2, cuando tiene que responder si un conjunto de tres vectores que genera al mismo W son Linealmente Independientes o Dependientes realiza los correspondientes cálculos no pudiendo interpretar que tres vectores que generan un espacio de dimensión 2 son Linealmente Dependientes, a pesar de haber utilizado en el Ejercicio 4 el teorema que afirma que “si se tienen más vectores que la dimensión del espacio vectorial a que pertenecen, dichos vectores son Linealmente Dependientes”.

CAPITULO V: CONCLUSIONES

Analizando las frecuencias de respuestas de los alumnos a los ejercicios presentados en el instrumento de recolección de información se puede observar primeramente que más de la mitad de los discentes responden incorrectamente o directamente no resuelven las situaciones planteadas. Discriminando por temas las dificultades prevalecen en el tema Base de un Espacio Vectorial sobre los temas Sistemas de Ecuaciones Lineales y Espacios Vectoriales.

Con respecto a las habilidades o procedimientos generales matemáticos y teniendo en cuenta el análisis cualitativo realizado se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Con respecto a la habilidad de Identificar, es decir distinguir un objeto matemático sobre la base de sus rasgos esenciales, no se observan en general dificultades para los contenidos analizados en la presente investigación. Con respecto al procedimiento general matemático de Demostrar, no se observan dificultades para demostrar que un conjunto W es subespacio de $(R^3, +, R, *)$ a través de las condiciones suficientes de la definición de espacio vectorial, para la determinación de la dependencia lineal de un conjunto de vectores como en demostrar que un conjunto de vectores es generador de un subespacio vectorial de $(R^3, +, R, *)$.
- En el análisis de la habilidad o procedimiento matemático de Interpretar, por parte de los alumnos, se puede concluir que en general no tienen dificultades con la interpretación de un sistema de ecuaciones, ni su conjunto solución cuando el mismo se presenta en forma matricial observándose, en casos particulares, dificultades en interpretar un sistema de ecuaciones lineales cuando el mismo se ha

planteado en forma coloquial. Con respecto a los temas espacios vectoriales, subespacios y su relación son los sistemas de ecuaciones lineales se puede afirmar, que los alumnos de la muestra seleccionada, no presentan dificultades para interpretar el conjunto solución del sistema como un subespacio de R^3 , siendo tres el número de variables del mismo, aunque si se observan dificultades en un grupo de alumnos en establecer la relación entre el conjunto solución del sistema como subespacio vectorial de R^3 , con la geometría del sistema de ecuaciones, es decir la intersección de dos planos que incluyen al origen del sistema de coordenadas. Analizando estas habilidades matemáticas en el tema base de un espacio vectorial, la mayor dificultad se observa en establecer relaciones entre la dimensión de un subespacio vectorial de $(R^3, +, R, *)$ generado por un conjunto de vectores y la dependencia o independencia lineal del mismo.

- Con respecto a la habilidad matemática de Graficar, se observa, que en general no presentan dificultades para la interpretación geométrica de vectores colineales o coplanares, como de ecuaciones de planos o rectas en R^3 . Si bien establecen correctamente las relaciones entre los conceptos colineal y coplanar con el concepto de dependencia lineal, presentan sus mayores dificultades en establecer las relaciones entre los conceptos de dimensión de un subespacio de R^3 , con el número de vectores que generan dicho subespacio. No logran establecer correctamente que en R^3 , existen subespacios de dimensión 3, de dimensión 2, de dimensión 1 y de dimensión 0.

Si se analizan los resultados de los Ejercicios referidos al tema Espacios Vectoriales y Base de un Espacio Vectorial y sus elementos que lo componen, es decir, dependencia lineal y sistema o conjunto de generadores de un espacio vectorial se observa claramente que no presentan mayores dificultades en la determinación de la dependencia o independencia de un conjunto de vectores a través de respectivos cálculos como así también determinar si ese conjunto de vectores es sistema o conjunto de generadores de un espacio vectorial determinado. Tampoco se observan dificultades en determinar si un conjunto es subespacio vectorial de $(R^3, +, R, *)$. Lo que si se observa y coincide con investigaciones realizadas es que las mayores dificultades no son referidas a los algoritmos de cálculo sino al estudio de las relaciones entre los conceptos como se establece en este

mismo capítulo, y más precisamente al contexto geométrico. Esta dificultad se ha producido tanto para los temas Subespacios Vectoriales como para Base de un Espacio Vectorial.

En función de estos resultados se sugiere establecer estrategias didácticas tendientes a enfatizar relaciones entre la geometría de un determinado concepto de Álgebra Lineal con sus respectivos contenidos. Por citar un ejemplo las relaciones geométricas entre un sistema de ecuaciones homogéneo con tres variables, su conjunto solución, son el concepto de subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, o enfatizar las relaciones entre un conjunto de vectores, la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por dicho conjunto y el concepto de dependencia o independencia lineal. También se pueden enfatizar estas relaciones en otros temas de la asignatura como Transformaciones Lineales, Autovalores y Autovectores de una Matriz para luego generalizar los resultados a espacios abstractos como $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, *)$. La puesta en marcha de estas estrategias puede dar lugar al planteo de nuevas preguntas de investigación en educación en esta rama de las matemáticas.

REFERENCIAS

- [1] H, Hernández. (1989). *El perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la Enseñanza Superior Cubana*. La Habana: Cuba. CONFEDI.
- (2007). Competencias Genéricas de Ingeniería. Documento Final.
- [2] D. Montgomery, and G. Runger (1998). *Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería*. Editorial McGraw-Hill. Mexico D. F.
- [3] J. Delgado Rubí. (1997). Un sistema de habilidades generales para la enseñanza en la Matemática. La Habana: ISPJAE.
- [4] CONFEDI. (2007). Competencias Genéricas de Ingeniería. Documento Final.
- Hernández Fernández, H., Delgado Rubí, J., Fernández de Alaíza, B., Valverde Ramírez, L., & Rodríguez Hung, T. (2001). Cuestiones de didáctica de la matemática. Conceptos y procedimientos en la educación polimodal y superior. Rosario: Homo Sapiens.
- [5] C. Herrera, and C. Verón. (2009). El desarrollo de Habilidades Matemáticas en Geometría Analítica. Congreso Regional de Ciencia y Tecnología. Norte Grande 2009. Catamarca. Publicado en Actas, p. 60.
- [6] L. Medina, C. Herrera and S. Aroca (2009). Habilidades de demostración y justificación como indicadores del proceso de asimilación de contenidos. Investigaciones en Facultades de Ingeniería del NOA, pp. 41-45.
- [7] C Herrera, C. Elena and M. Aranda (2010). Procedimientos generales matemáticos en alumnos de primer año de Ingeniería. Congreso Mundial y Exposición Ingeniería 2010. Capítulo: Formación del Ingeniero para el Desarrollo Sostenible. FIDS. Argentina. Buenos Aires.
- [8] J Dorier, A, Robert, J Robiner and Rogalsky. (2001). Teaching and learning linear algebra in the first year of French Science University. Equipe Didactique des Mathématiques. Laboratoire Leibniz Grenoble. Ponencia presentada en II Congreso Europeo sobre Educación en Matemática. Mariánské. República Checa.
- [9] J Hillel. (2000). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. En J.-L.
- [10] A. Sierpinska (1996). Problems related to the design of the teaching and learning process in Linear Algebra. Research Conference in Collegiate Mathematics Education, Central Michigan University.
- [11] Soto, (2003). Un estudio sobre las dificultades para la conversión gráfico-algebraicas relacionadas con los conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Cinvestav. IPN. Mexico, DF México.
- [12] A Sierpinska. (2000). On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *On the Teaching Linear Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [13] J Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 191–207). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [14] C Herrera, C Nuñez, H Dip, N Rodríguez, N., and Elena, C. R. (2006). Rendimiento y Calidad de Asimilación de contenidos de Álgebra y Geometría Analítica. Período 1999-2005. Experiencias Docentes en Ingeniería, pp. 441-448.
- [15] C Elena and C Herrera (2007). El desarrollo de habilidades matemáticas en alumnos de primer año de Ingeniería. Reunión de Educación Matemática. Unión Matemática Argentina. FAMAF, Córdoba.
- [16] N. Talizina. (1984). Conferencias sobre los Fundamentos de la Enseñanza en la Educación Superior. DEPEs. Universidad de la Habana. Cuba.
- [17] M Parraguez González and A Okaç (2012). Desarrollo de un esquema del concepto espacio vectorial. *Paradigma*, 33(1), 103-134.
- [18] A. Okaç, M Trigueros and X Vargas (2006). Understanding of Vector Spaces. A Viewpoint from APOS Theory. En CD-ROM Proceedings of

the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics.

[19] D Kú, D., Trigueros, M., and Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), 65-89.

[20] R Hernández Sampieri, C Fernández Collado and P Baptista Lucio (2003). *Metodología de la Investigación*. Tercera Edición.

[21] J Yuni, and Urbano, C. (2003). *Técnicas para investigar y formular proyectos de investigación*. Editorial Brujas. Córdoba, Argentina.

[22] R Vieytes (2004). *Metodología de la Investigación en Organizaciones, Mercado y Sociedad. Epistemología y Técnicas*. Editorial de las Ciencias. Buenos Aires, Argentina.